Álgebra lineal

Taller 6

Matrices elementales; determinantes. Fecha de entrega: 21 de septiembre de 2018

1. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación
$$A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$
   (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.
   (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.
   (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.
   (d) Haga lo mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.
   (e) Haga los mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. De las siguientes matrices calcule la determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}. \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Para las sigientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \ldots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots \cdot E_n A$ es de la forma triangular superior.
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Escribe la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales y calcule el determinante de A usando las matrices elementales encontradas.

5. Falso o verdadero? Pruebe sus respuestas.
   (a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es símetrica.
   (b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es símetrica.
   (c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
   (d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.

(e) Si $A+B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es símetrica.

(g) $AA^t = A^tA$.

6. (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

(b) Calcule $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

7. (a) Sea $P_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

(b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.