

Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores II.

Fecha de entrega: 14 de septiembre de 2018

1. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(matriz):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:

Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

- (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que significan los vectores \vec{x} y \vec{b} .
- (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuántos chocolates y cuántas mentas contienen:
- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B, | (iii) 2 caja de tipo A y 6 de tipo B, |
| (ii) 4 cajas de tipo A y 2 de tipo B, | (iv) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B. |
- (c) Determine si es posible conseguir
- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| (i) 5 chocolates y 15 mentas, | (iii) 21 chocolates y 23 mentas, |
| (ii) 2 chocolates y 11 mentas, | (iv) 14 chocolates y 19 mentas. |
- comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

4. (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M(m \times n)$ y sea e_k el k -ésimo vector unitario en \mathbb{R}^n (es decir, el vector en \mathbb{R}^n cuya k -ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule Ae_k para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A .
- (b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).
- (c) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.
- (d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{x} = \vec{0}$.
- (e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

5. (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector e_1 a \vec{v} y el vector e_2 a \vec{w} .

(ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector \vec{v} a e_1 y el vector \vec{w} a e_2 .

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

6. (a) Sean $A \in M(m, n)$, $B, C \in M(n, k)$, $D \in M(k, l)$.

(i) Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.

(ii) Demuestre que $A(BD) = (AB)D$.

(b) Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$