

# Álgebra lineal

## Taller 3

Planos y rectas en  $\mathbb{R}^3$ ; Eliminación de Gauß y Gauß-Jordan. Fecha de entrega: 31 de agosto de 2018

---

1. Dados líneas  $L_1$  y  $L_2$  y el punto  $P$ , determine:

- si  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas,
- si  $L_1$  y  $L_2$  tienen un punto de intersección,
- si  $P$  pertenece a  $L_1$  y/o a  $L_2$ ,
- una recta paralela a  $L_2$  que pase por  $P$ .

(a)  $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad P(5, 2, 11).$

(b)  $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : x = t + 1, \quad y = 3t - 4, \quad z = -t + 2, \quad P(5, 7, 2).$

2. En  $\mathbb{R}^3$  considere el plano  $E$  dado por  $E : 3x - 2y + 4z = 16$ .

- (a) Encuentre por lo menos tres puntos que pertenecen a  $E$ .
- (b) Encuentre un punto en  $E$  y dos vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  en  $E$  que no son paralelos entre si.
- (c) Encuentre un punto en  $E$  y un vector  $\vec{n}$  que es ortogonal a  $E$ .
- (d) Encuentre un punto en  $E$  y dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  en  $E$  con  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

3. Para los puntos  $P(1, 1, 1)$ ,  $Q(1, 0, -1)$  y los siguientes planos  $E$ :

- Encuentre la ecuación del plano.
- Determine si  $P$  pertenece al plano.
- Encuentre una recta que esté ortogonal a  $E$  y que contenga al punto  $Q$ .

(i)  $E$  es el plano que contiene al punto  $A(1, 0, 1)$  y es paralelo a los vectores  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(ii)  $E$  es el plano que contiene los puntos  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ,  $C(3, 2, 4)$ .

(iii)  $E$  es el plano que contiene el punto  $A(1, 0, 1)$  y es ortogonal al vector  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

4. Considere el plano  $E : 2x - y + 3z = 9$  y la recta  $L : x = 3t + 1, \quad y = -2t + 3, \quad z = 5t$ .

- (a) Encuentre  $E \cap L$ .
- (b) Encuentre una recta  $G$  que no interseca el plano  $E$  ni la recta  $L$ . Pruebe su afirmación. ¿Cuántas rectas con esta propiedad hay?

5. En  $\mathbb{R}^3$  considere el plano  $E$  dado por  $E : 3x - 2y + 4z = 16$ .

(a) Demuestre que los vectores  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  son paralelos al plano  $E$ .

(b) Encuentre números  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{v}$ .

(c) Demuestre que el vector  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  no es paralelo al plano  $E$  y encuentre vectores  $c_{\parallel}$  y  $c_{\perp}$  tal que  $c_{\parallel}$  es paralelo a  $E$ ,  $c_{\perp}$  es ortogonal a  $E$  y  $c = c_{\parallel} + c_{\perp}$ .

6. Use la eliminación de Gauß o Gauß-Jordan para encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a) 
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 7, \\2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 28, \\x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 6.\end{aligned}$$

(b) 
$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 13, \\x_1 - 2x_2 &= -4, \\4x_1 + 5x_2 &= 23.\end{aligned}$$

(c) 
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2, \\-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= -9, \\2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 19.\end{aligned}$$

(d) 
$$\begin{aligned}4x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= -13, \\2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 21, \\6x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 13.\end{aligned}$$

7. (a) En una panadería hay café, té, palito de queso y brownie. El primer cliente compra un café, un brownie y dos palitos de queso. Paga 12.000 pesos. El segundo cliente compra un té, un café y dos brownies. Paga 11.500 pesos. Después entran dos grupos de personas. El primer grupo pide 3 cafés, 4 té, 3 palitos de queso y 5 brownies. En total pagan 42.000 pesos. El otro grupo pide 5 cafés, un té, 4 palitos de queso y 3 brownies y paga 37.000 pesos.

¿Cuánto cuestan los productos café, té, palito de queso y brownie en la panadería?

(b) En un café un cliente pide dos espresos y 1 muffin y paga 7 euros. Un grupo de amigos pide 5 espresos y 6 muffins. Otro grupo pide 3 espresos y 4 muffins y paga 10 euros menos que el primer grupo. Determine cuánto cuestan el espreso y el muffin.

8. Sea  $E$  un plano en  $\mathbb{R}^2$  y sean  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  vectores paralelos a  $E$ , pero no paralelos entre sí. Demuestre:

(i) para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , el vector  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$  es paralelo al plano;

(ii) que para cualquier vector  $\vec{v}$  paralelo al plano existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ .