

# Álgebra lineal

## Taller 15

Diagonalización de matrices; secciones cónicas.

Fecha de entrega: 18 de mayo de 2018

1. Para cada una de las siguientes matrices, determine si son diagonalisables. Si lo es, encuentre una matriz invertible  $C$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $D = CAC^{-1}$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre una substitución ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas y encuentre la forma diagonal. Haga un bosquejo de las soluciones de  $F(x_1, x_2) = 1$  y  $F(x_1, x_2) = 0$ .

- (a)  $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$ ,
- (b)  $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2$ ,
- (c)  $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ ,
- (d)  $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2$ .

3. Encuentre una substitución ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas y encuentre la forma diagonal. Haga un bosquejo de las soluciones. Si es un elipse, calcule las longitudes de los ejes principales y el ángulo que tienen con el eje  $x$ . Si es una hipérbola, calcule el ángulo que tiene las asíntotas con el eje  $x$ .

- (a)  $10x^2 - 6xy + 2y^2 = 4$ ,
- (b)  $x^2 - 9y^2 = 2$ ,
- (c)  $x^2 - 9y^2 = 20$  (compare la solución con la del literal anterior!)
- (d)  $11x^2 - 16xy - y^2 = 30$ .
- (e)  $x^2 + 4xy + 4y^2 = 4$ .

4. (a) Demuestre que la solución de  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  es una (posiblemente degenerada o vacía)
- (i) elipse si  $b^2 - 4ac < 0$ ,
  - (ii) hipérbola si  $b^2 - 4ac > 0$ ,
  - (iii) parábola si  $b^2 - 4ac = 0$ .
- (b) Encuentre la sección cónica dada por  $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 3x + 2y = 13$ .