

Álgebra lineal

1. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Demuestre que \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- (b) Demuestre que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y \vec{d} son linealmente independientes. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Encuentre una base de U^\perp .

2. (a) Sea $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

- (i) Sea $\vec{v} = (0, 2, 5)^t$. Encuentre el punto $\vec{x} \in U$ que esté más cercano a \vec{v} y calcule la distancia entre \vec{v} y \vec{x} .
- (ii) Hay un punto $\vec{y} \in U$ que esté a una distancia máxima de \vec{v} ?
- (iii) * Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estándar).

(b) Sea $W = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t, (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

- (i) Encuentre una base ortogonal de W .
- (ii) Sean $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)^t$, $\vec{a}_2 = (11, 4, 4, -3)^t$, $\vec{a}_3 = (0, -1, -1, 0)^t$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $\vec{w}_j \in W$ que esté más cercano a \vec{a}_j y calcule la distancia entre \vec{a}_j y \vec{w}_j .
- (iii) * Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estándar).

3. Encuentre una base ortonormal de U^\perp donde $U = \text{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

4. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en \mathbb{C}^n :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

(b) Sea V el espacio de todas las funciones continuas $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V :

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{para } f, g \in V.$$

(c) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, \quad v_n(x) = \sin(n\pi x), \quad w_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$ con el product interno definido en Problema 13.4.

- (d) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$, $p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el product interno definido en Problema 13.4.

Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *polinomio j -ésimo de Legendre*.

5. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

- (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).
 (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (i) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)
 (ii) $\langle x, z \rangle = \overline{\langle x, z \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)
 (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
 (iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe:

- (i) y (iii) implican $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
- (ii) implica que $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x es *ortogonal a y* si y solo si $\langle x, y \rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en \mathbb{R}^n es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio 13.4.

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \rightarrow V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en \mathbb{R}^n .
- Reflexiones en \mathbb{R}^n .