

# Álgebra lineal

1. Para los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^4$ , calcule las dimensiones y los complementos ortogonales:

- (a)  $F = \text{gen}\{(1, 2, 3, 4)^t\}$ ,
- (b)  $G = \text{gen}\{(1, 2, 3, 4)^t, (1, 0, 1, 0)^t\}$ ,
- (c)  $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ ,
- (d)  $J = \text{gen}\{(1, 2, 3, 4)^t, (1, 0, 1, 0)^t, (0, 2, 1, 0)^t\}$ ,
- (e)  $K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0\}$ ,

2. Sean  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Demuestre que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de  $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ .

3. Sean  $\vec{a}, \vec{b}$  como en el ejercicio anterior y sea  $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- (a) Encuentre una fórmula para  $P_U$  (la proyección ortogonal sobre  $U$ ).
- (b) Calcule  $P_U \vec{x}$  y  $P_U \vec{y}$  para los vectores  $\vec{x} = (8, 3, 2, 1)$  y  $\vec{y} = (1, 0, 1, 4)$ .

4. (a) Sea  $\varphi \in \mathbb{R}$  y sean  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Demuestre que  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Encuentre la matriz  $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$  que describe rotación por  $\alpha$  contra las manecillas del reloj.
- (c) Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Explique por qué es claro que  $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$ . Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

5. Sea  $V$  un espacio vectorial y sean  $U, W \subseteq V$  subespacios.

- (a) Demuestre que  $U \cap W$  es un subespacio.
- (b) Demuestre que  $\dim U + \dim W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$ .
- (c) Suponga que  $U \cap W = \{0\}$ . Demuestre que  $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$ .
- (d) Demuestre que  $U^\perp$  es un subespacio de  $V$  y que  $(U^\perp)^\perp = U$ .