Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 10

Bases y dimensión. Fecha de entrega: 13 de abril de 2018

---

1. De los siguientes matrices, calcule kernel, imagen y las dimensiones correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

3. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:
   (i) A inyectiva $\Longrightarrow m \geq n$.
   (ii) A sobreyectiva $\Longrightarrow n \geq m$.

   Demuestre que la implicación "$\Longleftarrow$" en (i) and (ii) en general es falsa.

4. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es invertible. Demuestre que $m = n$.

5. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.
   (a) Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\operatorname{Im} A$?
   (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0,\ \dim(\ker A_1) = 1, \dots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

6. (a) Encuentre por lo menos dos funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.
   (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 2$?