Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 7

Matrices elementales; determinantes.

Fecha de entrega: 16 de marzo de 2018

1. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa y el determinante de la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

3. Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

4. (a) Calcule el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$.

   (b) Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0,\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

   ¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

5. Sea $A \in M(n \times n)$.

   (a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

1. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Demuestre que X con la suma y producto con números en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

   De los siguientes subconjuntos de X, diga si son subespacios de X.

   (i) Todas las funciones acotadas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

   (ii) Todas las funciones constantes.

   (iii) Todas las funciones continuas.

   (iv) Todas las funciones continuas con $f(3) = 0$.

   (v) Todas las funciones continuas con $f(3) = 4$.

   (vi) Todas las funciones con $f(3) > 0$.

   (vii) Todas las funciones pares.

   (viii) Todas las funciones impares.

   (ix) Todos los polinomios.

   (x) Todas las funciones nonegativas.

   (xi) Todos los polinomios de grado ≥ 4.

2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $M(m \times n, \mathbb{R})$ con la suma y producto con números en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

   De los siguientes subconjuntos de $M(n \times n)$, diga si son subespacios.

   (i) Todas matrices con $a_{11} = 0$.

   (ii) Todas matrices con $a_{11} = 3$.

   (iii) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.

   (iv) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

   Para los siguientes litarales supongamos que $n = m$.

   (v) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$) si $n = m$.

   (vi) Todas las matrices que no son simétricas.

   (vii) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$) si $n = m$.

   (viii) Todas las matrices diagonales.

   (ix) Todas las matrices triangular superior.

   (x) Todas las matrices triangular inferior.

   (xi) Todas las matrices invertibles.

   (xii) Todas las matrices no invertibles.

   (xiii) Todas las matrices con $\det A = 1$.