Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores II. Fecha de entrega: 02 de febrero de 2018

1. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(matriz):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M(m \times n)$ y sea e_k el k-ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k-ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule Ae_k para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A.

   (b) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector e_1 a $\vec{v}$ y el vector e_2 a $\vec{w}$.

   (ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{v}$ a e_1 y el vector $\vec{w}$ a e_2.

   (c) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

3. Una tienda vende dos tipos de paquetes de dulces:
Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

   (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que siginifican los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

   (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuantos chocolates y cuantas mentas contienen:

   (i) 1 paquete de tipo A y 3 de tipo B,
   (ii) 4 paquetes de tipo A y 2 de tipo B,
   (iii) 2 paquetes de tipo A y 6 de tipo B,
   (iv) 3 paquetes de tipo A y 5 de tipo B.

   (c) Determine si es posible conseguir

   (i) 5 chocolates y 15 mentas,
   (ii) 2 chocolates y 11 mentas,
   (iii) 21 chocolates y 23 mentas,
   (iv) 14 chocolates y 19 mentas.

   comprando paquetes de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

4. De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa y escríbelas como producto de matrices elementales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Sean $A \in M(m, n)$, $B, C \in M(n, k)$, $D \in M(k, l)$.

   (i) Demuestre que $A(B + C) = AB + AC$.

   (ii) Demuestre que $A(BD) = (AB)D$.

   (b) Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$