Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 4

Matrices y vectores I. Fecha de entrega: 23 de febrero de 2018

1. Calcule todas las posibles combinaciones (matriz)(vector):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

3. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

   (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.
   (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.
   (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.
   (d) Haga lo mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.
   (e) Haga los mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.
   (b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \| \vec{x}$. Para cada tal $\vec{x}$, encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

5. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.
   (b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.