Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$.

Fecha de entrega: 02 de febrero de 2018

---

1. Sean $P(2,3)$, $Q(-1,4)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\overrightarrow{PQ}$.

   (b) Calcule $\overline{PQ}$.

   (c) Calcule $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$.

   (d) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$.

2. Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de $\vec{v}$.

   (b) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que tienen la misma dirección que $\vec{v}$.

   (c) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que $\vec{v}$ y que tienen doble longitud de $\vec{v}$.

   (d) Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a $\vec{v}$.

3. Para las siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

   (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

   (c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$, (d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$,

   (b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$,

   .

5. Recuerde que un *espacio vectorial* es un conjunto V con una *suma* $\vec{u}+\vec{v} \in V$ para $\vec{u},\vec{v} \in V$ y un *producto* $\lambda\vec{v} \in V$ para $\vec{v} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

   (i) *asociatividad*: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ para todo $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$,

   (ii) *conmutatividad*: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{v}$ para todo $\vec{u},\vec{v} \in V$,

   (iii) *elemento neutral*: Existe un $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{0}+\vec{v} = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in V$,

   (iv) *elemento inverso*: Para todo $\vec{v} \in V$ existe un elemento $\widetilde{\vec{v}} \in V$ tal que $\vec{v}+\widetilde{\vec{v}} = \vec{0}$,

   (v) $1\vec{v} = \vec{v}$.

   (vi) *compatibilidad*: $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ para todo $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in V$,

   (vii) *distributividad*: $\lambda(\vec{v}+\vec{u}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v},\vec{u} \in V$,
   $(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$ para todo $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in V$.

   De todos los siguientes conjuntos decida si es un espacio vectorial con su suma y producto usual.

   (a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 0$.

   (e) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.