Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 14

Método de mínimos cuadrados;
matrices hermitianas; diagonalización.

Fecha de entrega: 24 de noviembre de 2017

1. (a) Una bola rueda a lo largo del eje x con velocidad constante. A lo largo de la trayectoria de la bola se miden las coordenadas x de la bola en ciertos tiempos t. Las siguientes mediciones son (t en segundos, x en metros):

x	1.5	2.0	3.0	4.0	4.5	6
t	1.4	2.3	4.7	6.6	7.4	10.8

   - Dibuje los puntos en el plano tx.
   - tse el método de mínimos cuadrados para econtrar la posición inicial x_0 y la velocidad v de la bola.
   - Dibuje la recta en el bosquejo anterior. ¿Dónde/Cómo se ven x_0 y v?

   Hint. Recuerde que $x(t) = x_0 + vt$ para un movimiento con velocidad constante.

   (b) Se supone que una sustancia química inestable decaye según la ley $P(t) = P_0 e^{kt}$. Suponga que se hicieron las siguientes mediciones:

t	1	2	3	4	5
P	7.4	6.5	5.7	5.2	4.9

   Con el método de mínimos cuadrados aplicado a $\ln(P(t))$, encuentre P_0 y k que mejor corresponden con las mediciones. Dé una estimada para $P(8)$.

   (c) Con el método de mínimos cuadrados encuentre el polínomio $y = p(x)$ de grado 2 que mejor aproxima los siguientes datos:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	15	8	2.8	-1.2	-4.9	-7.9	-8.7

2. Dados la matriz A y los vectores u y w:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -18 \\ -30 & -20 & 36 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Diga si los vectores u y w son autovectores de A. Si lo son, cuáles son los vectores propios correspondientes?

   (b) Puede usar que $\det(A - \lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 138\lambda + 280$. Calcule todos los autovalores de A.

3. Para cada una de las siguientes matrices, determine si son diagonalisables. Si lo es, encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $D = CAC^{-1}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Para las siguientes matrices, encuentre los vectorios propios, los espacios propios, una matriz invertible C y una matrix diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz hermitiana tal que todos sus autovalores son estrictamente mayores a 0. Sea $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ el producto interno estandar en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que A induce un producto interno en $\mathbb{C}^n$ a través de

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) := \langle Ax\,, y \rangle.$$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

   Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n.