Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 12

Complemento ortogonal. Fecha de entrega: 10 de noviembre de 2017

1. Para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$, calcule las dimensiones y los complementos ortogonales:
   (a) $F = \text{gen}\{(1,2,3,4)^t\}$,
   (b) $G = \text{gen}\{(1,2,3,4)^t,\ (1,0,1,0)^t\}$,
   (c) $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,)^t : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$,
   (d) $J = \text{gen}\{(1,2,3,4)^t,\ (1,0,1,0)^t,\ (0,2,1,0)^t\}$,
   (e) $K = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,)^t : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0\}$,

2. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.
   (a) Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal de $U = \text{span}\{\vec{v},\vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (b) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son linealmente independientes. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de $U = \text{span}\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Encuentre una base de $U^\perp$.

3. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ como en el ejercio anterior y sea $U = \text{span}\{\vec{v},\vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (a) Encuentre una fórmula para P_U (la proyección ortogonal sobre U).
   (b) Calcule $P_U\vec{x}$ y $P_U\vec{y}$ para los vectores $\vec{x} = (8,3,2,1)$ y $\vec{y} = (1,0,1,4)$.

4. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2\times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.
   (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha+\beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas
   $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

5. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.
   (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.
   (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.
   (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.
   (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.