Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 11

Cambio de bases. Fecha de entrega: 3 de noviembre de 2017

---

1. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y escriba los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\mathcal{B}$.

2. Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las matrices

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en términos de la base $\mathcal{B}$.

3. (a) Demuestre que la siguente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), \qquad \Phi(A) = A^t$$

   (b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estandar[1] de $M(2 \times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

   (c) Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que $\mathcal{C}$ es una base de $M(2 \times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

4. (a) Demuestre que $T : P_3 \to P_3,\ Tp = p'$ es una función lineal.

   (b) Determine $\ker(T),\ \mathrm{Im}(T),\ \dim(\ker(T)),\ \dim(\mathrm{Im}(T))$.

   (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estandar de P_3. Encuentre la matriz que representa a T con respecto a esta base.

   (d) Sean $q_1 = X+1,\ q_2 = X-1,\ q_3 = X^2+X,\ q_4 = X^3+1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de P_3. .

   (e) Encuentre la matriz con respecto a la base $\mathcal{C}$ que representa a T.

5. Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

   (a) Demuestre qu $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y $\vec{x}$ (en la representación estandar).

   (c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y $\vec{y}$ (en la representación estandar).

---

[1] $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.