

Álgebra lineal

Taller 8

Espacios vectoriales; generadores de espacios vectoriales; sistemas linealmente (in)dependientes.

Fecha de entrega: 13 de octubre de 2017

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.

- (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
- (b) Encuentre matrices que generen V . ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V ?

2. Sea U un subespacio de \mathbb{R}^n . Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de \mathbb{R}^n .

3. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

- (a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^m .
- (b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- (c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq 0\}$ son subespacios de \mathbb{R}^n ?
- (d) ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^k ?
- (e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de \mathbb{R}^k ?

4. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \rightarrow V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ por

$$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \quad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que (V, \oplus, \odot) es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

(b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:

Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \quad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$

para todo $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. (a) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Escriba $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de v_1 y v_2 .

(b) ¿Es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

(c) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}?$$

6. (a) ¿Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?
- (b) ¿Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?
- (c) ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2 ? Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?
- (d) ¿Los vectores $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M(2 \times 3)$?

7. (a) Es F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$. Demuestre que F es subespacio de \mathbb{R}^3 y encuentre vectores \vec{u} y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.

- (b) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \text{gen}\{v_1, v_2\}$. Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.

- (c) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de v_1 y v_2 , tal que $\text{gen}\{v_1, v_2, w\} = E$.
- (d) Encuentre un vector $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$.

8. (a) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2 ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

- (b) ¿El siguiente conjunto genera los matrices simétricas 2×2 ?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

- (c) ¿El siguiente conjunto genera los matrices triangulares superiores 2×2 ?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero?

- (a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los v_1, \dots, v_k . Entonces que z es combinación lineal de v_1, \dots, v_k, u .
- (b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces v_1, \dots, v_k, u es un sistema de vectores linealmente dependientes.
- (c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los v_2, \dots, v_k .