

Álgebra lineal

Taller 1

Vectores en \mathbb{R}^2 .

Fecha de entrega: 18 de agosto de 2017

1. Sean $P(2, 3)$, $Q(-1, 4)$ puntos en \mathbb{R}^2 y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en \mathbb{R}^2 .

- Calcule \overrightarrow{PQ} .
- Calcule \overline{PQ} .
- Calcule $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$.
- Encuentre todos los vectores que son ortogonales a \vec{v} .

2. Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de \vec{v} .
- Encuentre todos los vectores de longitud 3 que tienen la misma dirección que \vec{v} .
- Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que \vec{v} y que tienen doble longitud de \vec{v} .
- Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a \vec{v} .

3. Para las siguientes vectores \vec{u} y \vec{v} decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

- | | |
|--|---|
| (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, | (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, |
| (c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$, | (d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. |

4. (a) Para las siguientes parejas \vec{v} y \vec{w} encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que \vec{v} y \vec{w} son paralelos:

- (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$,

(b) Para las siguientes parejas \vec{v} y \vec{w} encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que \vec{v} y \vec{w} son perpendiculares:

- (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$,

5. Recuerde que un *espacio vectorial* es un conjunto V con una *suma* $\vec{u} + \vec{v} \in V$ para $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y un *producto* $\lambda \vec{v} \in V$ para $\vec{v} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

- (i) *asociatividad*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$,
- (ii) *conmutatividad*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$,
- (iii) *elemento neutral*: Existe un $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in V$,
- (iv) *elemento inverso*: Para todo $\vec{v} \in V$ existe un elemento $\tilde{\vec{v}} \in V$ tal que $\vec{v} + \tilde{\vec{v}} = \vec{0}$,
- (v) $1\vec{v} = \vec{v}$.
- (vi) *compatibilidad*: $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in V$,
- (vii) *distributividad*: $\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}, \vec{u} \in V$,
 $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in V$.

De todos los siguientes conjuntos decida si es un espacio vectorial con su suma y producto usual.

- (a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
- (b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,
- (c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(4) = 0$.
- (e) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.