Universidad Sergio Arboleda
Álgebra Lineal 1 (201610)
Ejercicios

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

(1) Encuentre el polinomio característico. Calcule los valores y vectores propios de las siguientes matrices.

(a)
$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -8 \end{bmatrix}.$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) Halle los valores y vectores propios de las siguientes transformaciones lineales.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 2y \end{bmatrix}$$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + z \\ y \\ x + z \end{bmatrix}$$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -5x + 3y - 5z \\ -3x - 2y \end{bmatrix}$$

(3) Determine si las siguientes matrices son diagonalizables. En caso de serlo determine cual es la matriz diagonal D y la matriz que diagonaliza C.

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) Encuentre una fórmula para el término general de las siguientes recurrencias lineales.

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$ para $k \geq 2$.
(b) **Sucesión de Lucas:** $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$ para $k \geq 2$.
(c) **Números de Pell:** $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $P_k = 2P_{k-1} + P_{k-2}$ para $k \geq 2$.
(d) **Primefree sequence:** $Q_0 = 4$, $Q_1 = 9$, $Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-2}$ para $k \geq 2$.
(e) $t_0 = 9$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_k = t_{k-1} + 4t_{k-2} - 4t_{k-3}$ para $k \geq 3$.

(5) Demuestre que si A es una matriz cuadrada diagonalizable, entonces el determinante de A es igual al producto de su valores propios.

(6) Demuestre que una matriz cuadrada es invertible si y solo si ninguno de sus valores propios es cero.

(7) Sea λ un valor propio de una matriz cuadrada A. Demuestre que $\lambda + r$ es un valor propio de $A + rI$ donde I es la matriz identidad.

(8) Decimos que la matriz A es similar a la matriz B si existe una matriz invertible C tal que $A = CBC^{-1}$. En particular, si una matriz cuadrada es diagonalizable entonces es similar a la matriz diagonal de valores propios.

(a) Demuestre que toda matriz cuadrada es similar a ella misma.
(b) Demuestre que si A es similar a B entonces B es similar a A.
(c) Demuestre que si A es similar a B y B es similar a D entonces A es similar a D.
(d) Demuestre que si A es similar a B entonces $\det(A) = \det(B)$.
(e) Sean A, B, D y E matrices cuadradas tales que existe una matriz invertible C que cumple $A = CBC^{-1}$, $D = CEC^{-1}$. Demuestre que $A + D$ es similar a $B + E$.

(9) Demuestre que si A y B son matrices similares (véase el punto anterior) entonces tienen los mismos valores propios. **Ayuda:** Demuestre que tienen el mismo polinomio característico.

(10) Demuestre que la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

es similar a la matriz

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo no todos los vectores propios de A son vectores propios de B.

(11) Demuestre que los valores propios de una matriz triángular superior corresponden a los números sobre su diagonal.

(12) Demuestre que los valores propios de A y A^T son los mismos.

(13) Contrario a los valores propios de A y A^T que coinciden según el punto anterior, encuentre un ejemplo en el cual los **vectores propios** de A y A^T no coincidan.

(14) Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $P_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Demuestre que $\det(A) = P_A(0)$ (es decir $\det(A) = a_0$.) **Ayuda:** Recuere que $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Universidad Sergio Arboleda
Álgebra Lineal 1 (201610)
Ejercicios

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

(1) Calcule el ángulo entre cada par de vectores dados.

(a) $\vec{v} = [1, 0, 0, 1]$ y $\vec{w} = [1, 0, 1, 1]$.
(b) $\vec{v} = [-2, -1, 1, 1, 0, 0, 1]$ y $\vec{w} = [0, 1, 1, 0, 1, 0, 1]$.
(c) $\vec{v} = [2, 1]$ y $\vec{w} = [2, 0]$.

(2) Halle y represente gráficamente la suma y resta de los siguientes vectores.

(a) $\vec{v} = [2, 1]$ y $\vec{w} = [2, 0]$.
(b) $\vec{v} = [1, -1]$ y $\vec{w} = [-1, 0]$.
(c) $\vec{v} = [-2, 3]$ y $\vec{w} = [1, -1]$.

(3) Encuentre el área de los triángulos que encierran los vértices dados.

(a) $(0, 1)$, $(2, -1)$ y $(3, 0)$.
(b) $(-2, 3)$, $(1, -2)$ y $(2, 0)$.
(c) $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$.
(d) $(-2, 1, 1)$, $(3, 1, -4)$ y $(2, 2, 1)$.

(4) Encuentre el área del paralelogramo con vértices en el origen y los vectores dados como lados.

(a) $2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) $2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(5) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$ son perpendiculares si y solo si $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.

(6) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$. Demuestre que las diagonales del rombo (Rombo :paralelogramo con los lados iguales) que definen $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

(7) Encuentre tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

(8) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\vec{v} \times \vec{w}$ es un vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Es decir, demuestre que $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

(9) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

(10) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin(\theta)$ donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

(11) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2$

Universidad Sergio Arboleda
Álgebra Lineal 1 (201610)
Ejercicios

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

(1) Encuentre la proyección de cada vector sobre el espacio dado.

(a) La proyección de $[2,1]$ sobre $W = \text{span}([3,4])$.

(b) La proyección de $[3,4]$ sobre $W = \text{span}([2,1])$.

(c) La proyección de $[1,2,1]$ sobre la línea

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) La proyección de $[-1,2,0,1]$ sobre $W = \text{span}([2,-3,1,2])$.

(2) Encuentre el complemento ortogonal del espacio dado.

(a) $W = \text{span}([1,2,-1])$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \text{span}([1,3,0],[2,1,4])$ en $\mathbb{R}^3$.

(c) El plano $2x + y + 3z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

(d) $W = \text{span}([2,1,3,4],[1,0,-2,1])$ en $\mathbb{R}^4$.

(3) Encuentre la proyección del vector sobre el subespacio dado.

(a) La proyección de $[1,2,1]$ sobre $\text{span}([3,1,2],[1,0,1])$.

(b) La proyección de $[1,2,1]$ sobre el plano $x + y + z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

(c) La proyección de $[1,0,-1,1]$ sobre $\text{span}([1,0,0,0],[0,1,1,0],[0,0,1,1])$ en $\mathbb{R}^4$.

(d) La proyección de $[1,1,1,1]$ sobre el hiperplano $x + y + z - w = 0$.

(4) Encuentre una base ortonormal para los siguientes subespacios.

(a) $\text{span}([1,2,0,2],[2,1,1,1],[1,0,1,1])$ en $\mathbb{R}^4$.

(b) $\text{span}([-1,0,1],[1,1,1])$ en $\mathbb{R}^3$.

(c) $\text{span}([1,-1,-1,1],[1,1,1,1],[-1,0,0,1])$ en $\mathbb{R}^4$.

(d) Una base ortonormal para el espacio nulo de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(5) Encuentre una diagonalización ortogonal de las siguientes matrices.

(a)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) La siguiente matriz no es simétrica razón por la cual sus vectores propios no son necesariamente ortogonales entre si. En este caso toca hacer Gram-Schmidt con los tres vectores propios para conseguir la matriz ortogonal.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(6) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existe un único vector $\vec{p}$ en W tal que $\vec{v} - \vec{p}$ es perpendicular a todo vector en W.

(7) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $W^\perp$ su complemento ortogonal. Sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\vec{v} = \vec{v}_W + \vec{v}_{W^\perp}$. Demuestre que $\|\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{v}_W\|^2 + \|\vec{v}_{W^\perp}\|^2}$

(8) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$.

(9) Sean U y W subespacios de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \subset W$. Demuestre que $W^\perp \subset U^\perp$.

(10) Sea A una matriz ortogonal. Demuestre que $\|A\vec{x}\| = \|A^{-1}\vec{x}\|$ para todo vector $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

(11) Sea D una matriz diagonal tal que $D = C^{-1}AC$, donde C es una matriz ortogonal. Demuestre que A es matriz simétrica.

(12) Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$ para todo par de vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que A es una matriz ortogonal.

(13) Sea A una matriz $n \times n$ tal que $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo vector $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que A es una matriz ortogonal.

Ayuda: Demuestre que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{4}(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$ y utilice el ejericicio anterior.

(14) Sean A y C matrices ortogonales $n \times n$. Demuestre que $C^{-1}AC$ es una matriz ortogonal.

(15) Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, sea C una matriz ortogonal de $n \times n$. Demuestre que

$$\{C\vec{v}_1, C\vec{v}_2, \ldots, C\vec{v}_n\}$$

es también una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.