Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 15

Matrices hermiticianas; diagonalización. Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016

---

1. Para las siguientes matrices, encuentre los vectorios propios, los espacios propios, una matriz invertible C y una matrix diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre una substitción ortogonal que diagonalice las formas cuadráticas dadas y encuentre la forma diagonal. Haga un bosquejo de las soluciones de $F(x_1, x_2) = 1$ y $F(x_1, x_2) = 0$.

   (a) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2$,

   (b) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2$,

   (c) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$,

   (d) $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2$.

3. (a) Demuestre que la solución de $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ es una (posiblemente degenerada o vacía)

   (i) elipse si $b^2 - 4ac < 0$,

   (ii) hipérbola si $b^2 - 4ac > 0$,

   (iii) parábola si $b^2 - 4ac = 0$.

   (b) Encuentre la sección cónica dada por $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 3x + 2y = 13$.

4. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz hermitiana tal que todos sus autovalores son estrictamente mayor a 0. Sea $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ el producto interno estandar en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que A induce un producto interno en $\mathbb{C}^n$ a través de

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) := \langle Ax\,, y \rangle.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Calcule $\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

   Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n.