

Álgebra lineal

1. (a) Sea $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
 - (i) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estándar).
 - (ii) Sea $\vec{v} = (0, 2, 5)^t$. Encuentre el punto $\vec{x} \in U$ que esté más cercano a \vec{v} y calcule la distancia entre \vec{v} y \vec{x} .
 - (iii) Hay un punto $\vec{y} \in U$ que esté a una distancia máxima de \vec{v} ?
- (b) Sea $W = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t, (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
 - (i) Encuentre una base ortogonal de W .
 - (ii) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estándar).
 - (iii) Sean $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)^t$, $\vec{a}_2 = (11, 4, 4, -3)^t$, $\vec{a}_3 = (0, -1, -1, 0)^t$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $\vec{w}_j \in W$ que esté más cercano a \vec{a}_j y calcule la distancia entre \vec{a}_j y \vec{w}_j .

2. Sea $V = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subseteq \mathbb{R}^5$ donde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Use el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de V .
 - (b) Encuentre V^\perp .
3. Encuentre una base ortonormal de U^\perp donde $U = \text{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
 4. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en \mathbb{C}^n :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

- (b) Sea V el espacio de todas las funciones continuas $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V :

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{para } f, g \in V.$$

- (c) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, \quad v_n(x) = \sin(n\pi x), \quad w_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$.

- (d) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$, $p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el producto interno definido en Problema 14.4.

Observación. Salvo constantes multiplicativas, el polinomio q_j es el *polinomio j -ésimo de Legendre*.

5. Sean $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que $A^* = B$ si y solo si

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (i) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)
(ii) $\langle x, z \rangle = \overline{\langle x, z \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)
(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
(iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe:

- (i) y (iii) implican $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
- (ii) implica que $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x es *ortogonal a y* si y solo si $\langle x, y \rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en \mathbb{R}^n es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio 14.4.