Álgebra lineal

Taller 13

Complemento ortogonal. Fecha de entrega: 9 de noviembre de 2016

1. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2\times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.
   (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha+\beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

2. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.
   (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.
   (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.
   (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.
   (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

3. Para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$, calcule las dimensiones y los complementos ortogonales:
   (a) $F = \text{gen}\{(1,2,3,4)^t\}$,
   (b) $G = \text{gen}\{(1,2,3,4)^t,\ (1,0,1,0)^t\}$,
   (c) $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,)^t : x_1+x_2-x_3+x_4 = 0,\ 2x_1+x_2+x_3-x_4 = 0\}$,
   (d) $J = \text{gen}\{(1,2,3,4)^t,\ (1,0,1,0)^t,\ (0,2,1,0)^t\}$,
   (e) $K = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,)^t : x_1+2x_2-3x_3+5x_4 = 0\}$,

4. Sean $O(n) = \{Q \in M(n\times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.
   (a) Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:
      (i) Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.
      (ii) Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.
      (iii) Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso $\widetilde{Q}$ tal que $\widetilde{Q}Q = Q\widetilde{Q} = E$.
   (b) ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?
   (c) Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n\times n)$.
   (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).
   (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \to V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \to G$ tal que:

(i) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

(ii) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\widetilde{g} \in G$ tal que $g\widetilde{g} = \widetilde{g}g = e$.

(iii) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

(i) $\mathbb{Z}$ con la suma;

(ii) $\mathbb{Q}$ con la suma;

(iii) $\mathbb{R}$ con la suma;

(iv) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;

(v) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;

(vi) funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la suma;

(vii) $M(n \times n)$ con la suma;

(viii) cada espacio vectorial con su suma;

(ix) funciones biyectivas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la composición;

(x) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;

(xi) funciones lineales biyectivas $V \to V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)-(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.