Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 11

Bases y dimensión. Fecha de entrega: 29 de octubre de 2016

---

1. De los siguientes matrices, calcule kernel, imagen y las dimensiones correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V, determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $V = P_4$, $p_1 = x^3 + x$, $p_2 = x^3 - x^2 + 3x$, $p_3 = x^2 + 2x - 5$, $p_4 = x^3 + 3x + 2$.

   (c) $V = M(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

4. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

   (i) A injective $\Longrightarrow m \geq n$.

   (ii) A surjective $\Longrightarrow n \geq m$.

   Demuestre que la implicación "$\Longleftarrow$" en (i) and (ii) en general es falsa.

5. Sea V un espacio vectorial.

   (a) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \operatorname{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}$.

   (b) Sea $U \subset V$ un subspacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{u_1, \dots u_k\} \subset U$.

   (c) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente: Equivalent:

      (i) $\operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.

      (ii) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.

   (d) Sean $u_1, \dots, u_k \in V$ y sea $A : V \to V$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \dim \operatorname{gen}\{Au_1, \dots, Au_k\}$. Es verdad si A no es invertible?