

Álgebra lineal

1. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; M(2 \times 2).$

(c) $p_1 = 1 + x, p_2 = x + x^2, p_3 = x^2 + x^3, p_4 = 1 + x + x^2 + x^3; P_3.$

2. (a) (i) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in \mathbb{R}^3 .

(ii) Complete la base encontrado en (i) a una base de \mathbb{R}^3 .

(b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.

(i) Demuestre que F es un subespacio de \mathbb{R}^4

(ii) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.

(iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de \mathbb{R}^4 .

(c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(i) Demuestre que G es un subespacio de \mathbb{R}^4

(ii) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.

(iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de \mathbb{R}^4 .

3. (a) Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Determine si estos vectores generan el espacio \mathbb{R}^3 . Si lo hacen, escoja una base de \mathbb{R}^3 de los vectores dados.

(b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2 . Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

(c) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3 .

4. Determine si $\text{gen}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ para

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. Para los siguientes conjuntos, determine si son espacios vectoriales. Si lo son, calcule su dimensión.

(a) $M_1 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ es triangular superior}\}.$

(b) $M_2 = \{A \in M(n \times n) : A \text{ tiene zeros en la diagonal}\}.$

(c) $M_3 = \{A \in M(n \times n) : A^t = -A\}.$

(d) $M_4 = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}.$