Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 8

Espacios vectoriales; subespacios. Fecha de entrega: 5 de octubre de 2016

---

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de los matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.
   (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   (b) Encuentre matrices que generan V. ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V?

2. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

3. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.
   (a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
   (b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   (c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq 0\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?
   (d) ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?
   (e) ¿Los conjuntos
   $$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$
   son subespacios de $\mathbb{R}^k$?

4. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$ y sea P el conjunto de todos los polinomios. Falso o verdadero? Pruebe sus afirmaciones.
   (a) P_n es un espacio vectorial.
   (b) $\{p \in P_n : p(0) = 0\}$ es un subespacio de P_n.
   (c) El conjunto de todos los polinomios de grado n es un espacio vectorial.
   (d) El conjunto de todos los polinomios de grado $\geq n$ es un espacio vectorial.
   (e) El conjunto de todos los polinomios que o son 0 o solo tienen potencias $\geq n$ es un espacio vectorial.
   (f) El conjunto de todos los polinomios que solo tienen potencias pares es un espacio vectorial.
   (g) El conjunto de todos los polinomios cuyos coeficientes son números enteros es un espacio vectorial.

5. (a) Sea $V = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y defina suma $\oplus : V \times V \to V$ y producto con escalar $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$ por
   $$x \oplus y = \arctan(\tan(x) + \tan(y)), \qquad \lambda \odot x = \arctan(\lambda \tan(x))$$
   para todo $x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   (b) Una generalización de la construcción en (a) es lo siguiente:
   Sea V un conjunto y $f : \mathbb{R}^n \to V$ una función biyectiva. Entonces V es un espacio vectorial con suma y producto con escalar definido así:
   $$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)), \qquad \lambda \odot x = f(\lambda f^{-1}(x))$$
   para todo $x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$.