Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entraga: 23 de noviembre de 2016, 12 m

Problem 1. Sea V un espacio vectorial con producto interno y $U \subset V$ un subespacio. Sea P la proyección ortogonal sobre U. Calcule los autovalores, el kernel y la imagen de P.

Hint. Considere $U = \{0\}$ y $U = V$ como casos especiales.

Claim. $\operatorname{Im} P = U$, $\ker P = U^\perp$, and

- $\sigma(P) = \{0\}$ if $U = \{0\}$,
- $\sigma(P) = \{1\}$ if $U = V$,
- $\sigma(P) = \{0, 1\}$ if $\{0\} \subsetneq U \subsetneq V$.

Proof. Es claro que $Pu = u$ para todo $u \in U$ y que $Pw = 0$ para todo $w \in U^\perp$. Así que

$$U \subseteq \operatorname{Im}(P), \qquad U^\perp \subseteq \ker(P). \tag{1}$$

Entonces tenemos que $\dim \operatorname{Im} P \geq \dim U$ y $\ker \operatorname{Im} P \geq \dim U^\perp$. Por otro lado sabemos que

$$\dim(\ker P) + \dim(\operatorname{Im} P) = \dim V = \dim U + \dim U^\perp.$$

Por lo tanto se sigue que en efecto $\dim \operatorname{Im} P = \dim U$ y $\ker \operatorname{Im} P = \dim U^\perp$ y de esto y (1) obtenemos $U = \operatorname{Im}(P)$ y $U^\perp = \ker(P)$.

Ahora calculemos el espectro de P. Si $U = \{0\}$, entonces $P = 0$ y claramente P tiene solo el autovalor 0 y el espacio propio asociado es $E_0 = V$. Si $U = V$, entonces $P = \mathbb{1}$ y claramente P tiene solo el autovalor 1 y el espacio propio asociado es $E_1 = V$.

Ahora sea $\{0\} \subsetneq U \subsetneq V$. Por lo anterior sabemos que $Pu = u$ si y solo si $u \in U$. Dado que $U \neq \{0\}$, se sigue que 1 es autovalor de P y que el subespacio correspondiente es $E_1 = U$. También sabemos que $U^\perp \neq \{0\}$ (porque $U \neq V$) y que $Pu = 0$ si y solo si $u \in U^\perp$. Dado que $U \neq \{0\}$. Se sigue que 0 es autovalor de P y que el subespacio correspondiente es $E_0 = U^\perp$. Since $U \oplus U^\perp = V$ no puede haber otros autovalores.

Prueba alternativa. Escoja una base $\mathcal{B}_1$ de U y una base $\mathcal{B}_2$ de $U^\perp$. Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}$ es una base de V. La representación matricial de P con respecto a esta base es

$$(P)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_k & \mathbb{0}_{k,m} \\ \mathbb{0}_{m,k} & \mathbb{0}_{m,m} \end{pmatrix}$$

donde $k = \dim U$, $m = \dim V - k$, $\mathbb{1}_k$ es una la matriz unidad $k \times k$, y $\mathbb{0}_{i,j}$ es la matriz $i \times j$ cuyas entradas son todas 0.

Problem 2. Sea V un espacio vectorial y $U \subset V$ un subespacio. Demuestre que existe una función lineal $T : V \to V$ tal que $\ker T = U$.

Tome T = proyección ortogonal sobre U. En ejercicio 1 se probó que $\ker T = U$.

Problem 3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ una función lineal con $\dim(\ker(T)) = n - 1$ y $T^2 \neq 0$. Demuestre que T es diagonalizable. ¿Esta afirmación es cierta si $T^2 = 0$?

Observe que por hipotésis $\dim(\operatorname{Im} T) = n - \dim(\ker T) = 1$. Sea $v \in V$ tal que $T^2 v \neq 0$. Note que en particular $Tv \neq 0$. Dado que $Tv \in \operatorname{Im} V$ y $T^2 v \in \operatorname{Im} V$ y $\dim(\operatorname{Im} T) = 1$ por hipotésis, Tv y $T^2 v$ deben ser paralelos. Por tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T^2 v = \lambda T v$, es decir, $T(Tv) = \lambda T v$. Esto implica que λ es un autovalor de T y que Tv es un autovector. Por tanto $\operatorname{Im}(T) \subseteq E_\lambda(T)$ (en verdad se tiene igualdad). Escoja una base ortogonal $u_1, \dots, u_{n-1}$ en $\ker T$ y defina $u_n = \frac{Tv}{\|Tv\|}$. Observe que $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\}$ es un sistema de n vectores linealmente independientes y por tanto es una base de V. La representación de T respecta a esta base es una matric diagonal:

$$(T)_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} & \Large 0 & \\ \hdashline 0 & \cdots\cdots\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $T^2 = 0$ la afirmación es falsa. Tome $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$. Observe que $T^2 = 0$. Si T fuera diagonalizable, $\mathbb{R}^2$ debería tener una base que consiste de valores propios de T. El único autovalor es 0 y la dimensión del espacio propio correspondiente tiene dimensión 1, así que T no puede ser diagonalizable.

Problem 4. (a) Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Recuerde que $\det Q = \pm 1$.

(i) Suponga que $\det Q = 1$. Demuestre que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Verifique que esto es una rotación de ángulo φ en contra de las manecillas del reloj.

(ii) Suponga que $\det Q = -1$. Demuestre que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Verifique que esto es la composición de una rotación de ángulo φ en contra de las manecillas del reloj. y una reflexión.

(iii) En los dos casos anteriores, encuentre todos los φ tal que Q tiene autovalores. En estos casos, encuentre los autovalores y autovectores.

Observación. Es muy fácil de verficar que las matrices en (i) y (ii) son matrices ortogonales.

Sea $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Luego

$$\mathbb{1} = QQ^{-1} = QQ^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

es decir, tenemos las ecuaciones

$$a^2 + b^2 = 1, \quad ac + bd = 0, \quad c^2 + d^2 = 1.$$

Por la primera ecuación sabemos que existe un φ tal que $a = \cos\varphi$ y $b = \sin\varphi$. La segunda ecuación muestra que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $d = \mu a$ y $b = -\mu b$. Finalmente la tercera ecuación implica que $\mu = \pm 1$.

Observe que

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\mu\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mu\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \det Q = \mu.$$

(i) Si $\det Q = 1$, necesariamente $\mu = 1$ y la afirmación se sigue. Es fácil ver que Q es una rotación.

Agragar dibujito.

(ii) Si $\det Q = -1$, necesariamente $\mu = -1$ y la afirmación sobre la representación de Q como afirmada se sigue. Observe que en este caso podemos definir $\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Claramente $\widetilde{Q}$ es de la forma en (i), R es una reflexión y $Q = R\widetilde{Q}$.

Agragar dibujito.

(iii) Para determinar los autovalores de Q, calculamos

$$\begin{aligned} \det(Q - \lambda) &= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\mu\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mu\cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = \mu\left[(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi\right] \\ &= \mu\left[\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(2\cos\varphi \pm \sqrt{4\cos^2\varphi - 4}\right) = \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi}.$$

Eso es real si y solo si $\sin\varphi = 0$, es decir, si $\varphi = k\pi$ para un $k \in \mathbb{Z}$. En el caso que k es par, Q es la identidad (compuesta con una reflexión si $\det Q = -1$) y $\lambda = 1$.

En el caso que k es impar, Q es una rotación (compuesta con una reflexión si $\det Q = -1$) por $180°$ y $\lambda = -1$.

Problem 5. Considere la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = Q. \tag{$*$}$$

Defina el vector $Y = (y,\ y', \ldots,\ y^{(n)})^t$ cuyas entradas son funciones. Demuestre que Y satisface la ecuación diferencial de grado 1

$$Y' = AY$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que el polinomio característico de la ecuación diferencial ($*$) es igual al polinomio característico de la matriz A salvo un factor $(-1)^n$.

Observe que

$$AY = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y' - a_0 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q \end{pmatrix} = Y' + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda) = (-1)^n \det(\lambda - A)$. Observe que al quitar la $k$ésima columna y la última fila obtenmos una matriz diagonal con k veces λ y $n-k$ veces -1 en la diagonal. Así que, expandiendo el determinante por la última fila, obtenemos

$$\det(\lambda - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \lambda & -1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n a_0 (-1)^n + (-1)^{n-1} a_1 \lambda (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} a_2 \lambda^2 (-1)^{n-2} \\ &\quad + \cdots + (-1)^1 a_{n-1} \lambda^{n-1} (-1)^1 + (\lambda + a_n)\lambda^n \\ &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (\lambda + a_n)\lambda^n \\ &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n + \lambda^{n+1} \\ &= \text{ polinomio característico de } (*). \end{aligned}$$

Problem 6. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función lineal simétrica. Sea λ un autovalor de T y sea E_λ el espacio propio correspondiente. Demuestre que $\mathrm{Im}(T|_{E_\lambda}) \subseteq E_\lambda$, $\mathrm{Im}(T|_{E_\lambda^\perp}) \subseteq E_\lambda^\perp$ y que $T|_{E_\lambda^\perp}$ es simétrico.

Es decir, hay que probar que:

(a) $x \in E_\lambda \implies Tx \in E_\lambda$,

(b) $x \in E_\lambda^\perp \implies Tx \in E_\lambda^\perp$,

(c) para todo $x, y \in E_\lambda^\perp$ se tiene que $\langle x\,, Ty\rangle = \langle Tx\,, y\rangle$.

(a) Sea $x \in E_\lambda$. Entonces $(T - \lambda)x = 0$, es decir que $Tx = \lambda x \in E_\lambda$.

(b) Sea $x \in E_\lambda^\perp$ y sea $w \in E_\lambda$ arbitario. Entonces $\langle Tx\,, v\rangle = \langle x\,, Tv\rangle = \langle x\,, \lambda v\rangle = \lambda\langle x\,, v\rangle = 0$. Por lo tanto $Tx \in E_\lambda^\perp$.

(c) Dado que T es simétrico, sabemos que $\langle x\,, Ty\rangle = \langle Tx\,, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, en particular es verdad para $x, y \in E_\lambda^\perp$.

Problem 7. Demuestre que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ son semejantes. Encuentre por lo menos dos matrices invertibles C distintas tal que $B = C^{-1}AC$. ¿Es posible escoger C tal que es ortogonal?

A y B tiene los mismos autovalores con las mismas multiplicidades. Por tanto son semejantes. Calculemos los autovectores de A:

- $\ker(A - 1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\,\{\vec{v}_1\}$ con $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\ker(A - 3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\,\{\vec{v}_2\}$ con $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Para cada $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sea $C_{ab} = (a\vec{v}_1 | b\vec{v}_2)$. Es claro que C_{ab} es invertible dado que $\det C_{ab} = ab \det(\vec{v}_1|\vec{v}_2) = -ab \neq 0$. Por construcción de C_{ab} se tiene que

  $$C_{ab}^{-1} A C_{ab} = B$$

  y estos matrices son las únicas que diagonalizan a A a la forma B (porque las columnas de cualquier matriz de cambio de base que diagonaliza a A deben ser los autovectores de A).

  Podemos por ejemplo escoger $C = C_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ó $C = C_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

  No es posible escoger C de la forma ortogonal porque para todo $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tenemos que

  $$C_{ab} C_{ab}^t = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 2b^2 \\ 2ab & ab + 4b^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 8. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta con una prueba o con un contraejemplo.

(a) Cada proyección ortogonal en un espacio de dimensión finita es diagonalizable.

(b) Cada proyección ortogonal en un espacio de dimensión finita es una función ortogonal (es decir $P^t = P^{-1}$, después de escogencia de una base).

(c) Los únicos autovalores posibles de una proyección ortogonal son 0 y 1.

(a) Es correcto. Para una prueba, vea Problem 1.

(b) Es falso. En general, P no es invertible, por tanto no puede ser ortogonal. El único caso en el cual P in ortogonal es si $P = \mathbb{1}$, es decir, si en espacio sobre el cual proyecta P es todo el espacio vectorial dado.

(c) Es correcto. Para una prueba, vea Problem 1.

Problem 9. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta con una prueba o con un contraejemplo.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sea $A : V \to V$ una función lineal.

(a) Los autovalores de A y de A^t coinciden.

(b) Suponga que A es simétrica e invertible. (Puede pensar en $V = \mathbb{R}^n$ y $A \in M(n \times n)$ con $A = A^t$.) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A, entonces los autovalores de A^{-1} son $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.

(a) Los autovalores de A y de A^t coinciden porque

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda) = \det((A - \lambda)^t) = \det(A^t - \lambda) = p_{A^t}(\lambda).$$

(b) Suponga que A es simétrica e invertible. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A y $\mu_1, \dots, \mu_n$ los autovalores de A^{-1}. Ningún autovalor puede ser cero (si lo fuera, A o A^{-1} no sería invertible). Para cada $j = 1, \dots n$ escoja un autovector v_j de A. Entonces $A^{-1}v_j = A^{-1}(\frac{1}{\lambda}Av_j) = A^{-1}A(\frac{1}{\lambda}v_j) = \frac{1}{\lambda}v_j$. Entonces v_j es autovector de A^{-1} con autovalor λ_j^{-1}. Analogamente podemos mostrar que cada autovector de A^{-1} con autovalor μ_j es autovector de A con autovalor μ_j^{-1}.

Problem 10. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta con una prueba o con un contraejemplo.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sean $A, B : V \to V$ funciones lineales.

(a) Suponga que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y que $\mu_1, \dots, \mu_n$ son los autovalores de B, entonces los autovalores de AB son $\mu_1\lambda_1, \dots, \mu_n\lambda_n$.

(b) Suponga que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces los autovalores de $A + \alpha$ son $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$.

(a) Es falso. Tome por ejemplo $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Entonces A, B no tienen autovalores, pero $AB = \mathbb{1}$ sí tiene autovalores.

(b) Es correcto. Observe que $p_A(x) = \det(A - \lambda)$ y

$$p_{A+\alpha}(x) = \det(A + \alpha - x) = \det(A - (x - \alpha)) = p_A(x - \alpha).$$

Entonces λ es autovalor de A si y solo si $p_A(\lambda) = 0$ si y solo si $p_{A+\alpha}(\lambda + \alpha) = 0$ si y solo si $\lambda + \alpha$ es autovalor de $A + \alpha$.

Problem 11. Sea $A \in M(n \times n)$.

(a) Demuestre que 0 es autovalor de A si y solo si 0 es autovalor de A^tA. Demuestre que en este caso $\ker(A) = \ker(A^tA)$.

(b) ¿Se tiene que $\ker(A) = \ker(A^2)$?

(a) Suponga que 0 es autovalor de A y sea v un autovector. Entonces $Av = 0$ y por lo tanto también $A^tAv = 0$. Dado que $v \neq 0$, se sigue que 0 es autovalor de A^tA.

Por otro lado, suponga que 0 es autovalor de A^tA y sea v un autovector. Entonces $A^tAv = 0$ y tenemos

$$0 = \langle A^tAv\,, v\rangle = \langle Av\,, Av\rangle = \|Av\|^2.$$

Esto demuestre que $Av = 0$. Dado que $v \neq 0$, se sigue que 0 es autovalor de A.

(b) Esto es falso. Tome $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que $A^2 = 0$. Así que tenemos que $\ker A = \text{gen}\{\vec{e}_1\}$ pero $\ker A^2 = \mathbb{R}^2$.

Problem 12. (a) Sea $A \in M(3 \times 3)$ una matriz simétrica con $\det(A) = 12$. Suponga que 2 y 1 son autovalores de A. ¿Cuál es el tercer autovalor de A?

(b) Sea $A \in M(3 \times 3)$ una matriz simétrica no invertible. Suponga que 2 y 1 son autovalores de A. ¿Cuál es el tercer autovalor de A?

(a) Dado que A es simétrica, sabemos que es diagonalizable y que tiene tres autovalores a, b, c (pueden ser repitidos). Además sabemos que $\det A = abc$ (esto se ve por ejemplo si aplicamos un cambio de base tal que A quede representado como matrix diagonal. En la diagonal están los autovalores de A. Observe adicionalmente que un cambio de base no cambia la determinante). Con todo esto sabemos que $12 = \det(A) = abc$. Dado que conocemos el valor de dos autovalores, digamos $a = 2$ y $b = 1$, el tercero debe ser $c = \frac{\det A}{ab} = \frac{12}{2} = 6$.

(b) Si A no es invertible, necesariamente $\det A = 0$. Como en el literal anterior sabemos que $\det A$ es el producto de los autovalores de A. Sabemos que dos autovalores de A son distintos de 0. Por lo tanto de tercero debe ser igual a 0.