Universidad de los Andes, MATE-4330
Víctor Bermúdez

Análisis Funcional

Taller 14

Operadores no negativos, operadores adjuntos.

Fecha de entrega: Mayo 9 de 2012

---

1. Determine todas las funciones continuas $\tau : [0,1] \to [0,1]$ tales que

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \qquad Af := f \circ \tau$$

es compacto.

2. Sea $X = C[0,1]$ y $k \in C[0,1]^2$ y defina

$$T : X \to X, \qquad (Tx)(t) = \int_0^t k(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$$

   (a) Muestre que T es compacto.
   (b) Muestre que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$.
   (c) Muestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para todo $y \in X$ existe exactamente un $x \in X$ tal que $(T - \lambda)x = y$.

3. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $K \in L(H_1, H_2)$ un operador compacto. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de proyecciones con $P_n \xrightarrow{s} \mathrm{id}$. Muestre que $\|K - KP_n\| \to 0$.

4. Defina $T : \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N})$ por

$$Tx = \Big(0,\ \frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{x_1 + x_3}{2^2},\ \dots,\ \frac{x_1 + x_{n+1}}{2^n},\ \dots\Big).$$

Muestre que T es compacto y determine $\|T\|$, $\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$.

5. Sea $f \in C[0,1]$ y considere

$$y''(s) + \lambda f(s)y(s) = x(s), \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta. \qquad (*)$$

Muestre que para λ dada exactamente uno de lo siguiente se cumple:

   (a) Para cada $x \in C[0,1]$, $(*)$ tiene exactamente una solución dos veces continuamente derivable.
   (b) La ecuación homogénea correspondiente a $(*)$ tiene una solución no trivial.

Muestre que el conjunto de todos los λ tales que b) se tiene, es a lo más contable y no tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$.