Universidad de los Andes, MATE-4330
Víctor Bermúdez

Análisis Funcional

Taller 10

Teorema de Riez-Fischer. Proyecciones.

Fecha de entrega: Abril 11 de 2012

---

1. Sea H un espacio de Hilbert and $B : H \times H \to \mathbb{K}$ sesquilineal. En $H \times H$ considere la norma $\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.
   (a) Muestre que las siguientes son equivalentes:
      (i) B es contínua.
      (ii) B is parcialmente contínua, es decir, para cada x_0 fijo, $y \mapsto B(x_0, y)$ es contínua para cada y_0 fijo, $x \mapsto B(x, y_0)$ es contínua.
      (iii) B es acotado, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in H$.
   (b) Si B es contínuo, entonces existe $T \in L(H)$ tal que
   $$B(x, y) = \langle Tx\,, y\rangle, \qquad x, y \in H.$$
   (c) Si además existe $m > 0$ tal que $B(x, x) \geq m\|x\|^2$, $x \in H$, entonces T es invertible y $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$.

2. Sea H un espacio de Hilbert. Muestre que para toda sucesión $(x_n)_n \subseteq H$ acotada, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que la sucesión $(y_m)_m$ donde,
   $$y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k},$$
   converge.

3. Sea X un espacio normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $x \in X$. Las siguientes son equivalentes:
   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge incondicionalmente a x.
   (b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que para todo conjunto finito B con $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$
   $$\Big\| \sum_{b\in B} x_b - x \Big\| < \varepsilon.$$

4. Sea H un espacio de Hilbert. Si $P : H \to H$ es un operador lineal, las siquientes son equivalentes:
   (a) P es una proyección ortogonal.
   (b) $P^2 = P$ y $\langle Px\,, y\rangle = \langle x\,, Py\rangle$.