Universidad de los Andes, MATE-4330
Rodrigo Cancino

Análisis Funcional

Taller 9

Espacios de Hilbert y pre-Hilbert

Fecha de entrega: 28 de Marzo de 2012

Los primeros dos problemas son obligatorios. De los siguientes escoja dos.

1. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ defina $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_\lambda(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda s}$ y sea $X = \operatorname{span}\{f_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Muestre que

$$\langle f\,, g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(s)\overline{g(s)}\,\mathrm{d}s$$

   define un producto interior en X. Muestre que la completación de X no es separable. ($\|f_\lambda - f_{\lambda'}\| = ?$)

   Los elementos en la completación de X se llaman *funciones casi periódicas.*

2. ¿Existe algún producto interno $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ en $C[0,1]$ tal que $\langle x, x\rangle = \|x\|_\infty$ para todo $x \in C[0,1]$?

3. Sea X un espacio pre-Hilbert. Muestre los siguientes resultados

   (a) Sean $x, y \in X$ con $x \perp y$, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

   ¿El converso es cierto en general? ¿Hay algún caso para el que se tenga?

   (b) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $x \perp y$ muestre que el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente independiente. ¿Como se puede generalizar este resultado?

   (c) $x \perp y$, si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo escalar α.

4. Sea X un espacio pre-Hilbert y $U \subseteq X$ un subespacio. Muestre que

   (a) $\overline{U} \neq U^{\perp\perp}$. ¿Se tiene alguna contenencia?

   (b) $\overline{U} \oplus U^{\perp\perp} \neq X$

5. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $f \in L_p(\mathbb{R})$ y $s \in \mathbb{R}$ defina $T_s : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ como $(T_s f)(t) := f(t - s)$. Claramente los T_s son isometrias lineales.

   (a) Sea $1 \leq p < \infty$. Muestre que $T_s \xrightarrow{s} \mathrm{id}$ para $s \to 0$. Los T_s convergen en norma?

   (b) Los T_s convergen en norma o convergen fuertemente en el caso $p = \infty$?

6. Muestre que $W^m(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ y $H_0^m(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Para el problema 6: Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ definimos el conjunto de *funciones de prueba*

$$\mathscr{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \ \text{ es compacto}\}.$$

Para un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se define $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $D^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \varphi$ si la derivada existe.
Sea $f \in L_2(\Omega)$. Una función $g \in L_2(\Omega)$ se llama la *derivada débil* α-ésima de f si

$$\langle g , \varphi \rangle = (-)^{|\alpha|} \langle f , D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Note que la derivada débil es única si existe; se denota por $D^{(\alpha)} f$.
Para $m \in \mathbb{N}$ definimos el *espacio de Sobolev*

$$W^m(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : D^{(\alpha)} f \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(\Omega)$ es un producto interior con

$$\langle f , g \rangle_{W^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^{(\alpha)} f , D^{(\alpha)} g \rangle_2.$$

Además, definimos los espacios

$$H^m(\Omega) := \overline{C^m(\Omega) \cap W^m(\Omega)} \qquad \text{and} \qquad H_0^m(\Omega) := \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$$

donde la clausura es tomada con respecto a la norma inducida por $\langle \cdot , \cdot \rangle_{W^m}$.