Universidad de los Andes, MATE-4330
Víctor Bermúdez

Functional Analysis

Taller 8

Hilbert spaces.

Fecha de entrega: 21 de marzo de 2012

---

1. Sea X un espacio pre-Hilbert, $U \subseteq H$ un subespacio denso y $x_0 \in X$ tal que $\langle x_0 \,, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$. Muestre que $x_0 = 0$.

2. Sea $w \in C([0,1], \mathbb{R})$. Para $x, y \in C([0,1])$ se define
$$\langle x \,, y \rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)\, \mathrm{d}t.$$
Halle una condición necesaria y suficiente spobre w para que $\langle \cdot \,, \cdot \rangle_w$ sea un producto interno. Bajo qué condición la norma inducida por $\langle \cdot \,, \cdot \rangle_w$ es equivalente a la norma usual de L_2?

3. Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$ un subconjunto convexo, balanceado y absorbente. Muestre que el funcional de Minkowski p_M es una seminorma en X.

4. Ejemplo de una proyección no acotada. Sea $\mathcal{H} = l_2$ y e_i el vector usual $e_i^j = \delta_i^j$. Defina
$$L_1 := \overline{span\{e_{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}}$$
y
$$L_2 := \overline{span\left\{e_1 + \frac{1}{2}e_2, e_3 + \frac{1}{2^2}e_4, e_5 + \frac{1}{2^3}e_6, \dots\right\}}.$$
   (a) Muestre que $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
   (b) Muestre que $\overline{L_1 \oplus L_2} = \mathcal{H}$.
   (c) Muestre que $L_1 \oplus L_2 \neq \mathcal{H}$.
   (d) Defina el operador $P_0 : L_1 \oplus L_2 \to L_1 \oplus L_2$, $P_0(x + y) = x$. Muestre que P_0 es una proyección no acotada.