

Análisis Funcional

Taller 7

Topología débil.

Fecha de entrega: 14 de Marzo de 2012

1. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ es una *sucesión débil de Cauchy* si para todo $\varphi \in X'$ la sucesión $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{K} .

- (a) Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X . Muestre que x es una sucesión débil de Cauchy si y solo si existe un subconjunto denso U' de X' tal que $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $\varphi \in U'$.
- (b) Toda sucesión débil de Cauchy en X es acotada.

2. Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X'$, y $x_0 \in X$, $\varphi_0 \in X'$ tal que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi_0$. Muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$.

3. Sea X un espacio normado.

- (a) Muestre que $(X, \|\cdot\|)' = (X, \sigma(X, X'))'$. Es decir: un funcional lineal $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\|\cdot\|$ si y sólo si es continua con respecto a la topología débil.
- (b) Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $x_0 \in X$ y $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X'$, $\varphi_0 \in X'$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi_0$. Muestre

$$\|x_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|, \quad \|\varphi_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|.$$

- (c) Sean $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria y $K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la bola unitaria cerrada en X . ¿Siempre son débilmente cerradas (prueba o contraejemplo)?

4. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ la sucesión que tiene 1 en la posición n y 0 en el resto.

- (a) Muestre que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente débilmente en ℓ_1 .
- (b) Muestre que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es w^* convergente en ℓ_1 .