Universidad de los Andes, MATE-4330
Rodrigo Cancino

Análisis Funcional

Taller 5

Teorema de Baire;
Principio de acotación uniforme.

Fecha de entrega: 29 de Febrero de 2012

---

1. (a) Todo espacio métrico completo con infinitos elementos y ningún punto aislado es no enumerable.

   (b) Toda base algebraica de un espacio de Banach infinito dimensional es no enumerable.

2. (a) Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$. Suponga que para todo $x \in X$ el límite $Tx := \lim_{n\in\mathbb{N}} T_n x$ existe. Entonces $T \in L(X,Y)$.

   (b) Sean X, Y espacios de Banach, Y reflexivo, y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ tal que $(\varphi(T_n x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $x \in X$ y $\varphi \in Y'$. Entonces existe un $T \in L(X,Y)$ tal que $T_n \xrightarrow{w} T$.

3. Muestre que la hipótesis de completitud en el principio de acotación uniforme es necesaria.

4. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y tome $a \leq t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leq b$ y $\alpha_k^{(n)} \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$. Para $f \in C([a,b])$ se define

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\ f(t_k^{(n)}).$$

   Muestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

   (a) $Q_n(f) \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\ n \to \infty$, para todo $f \in C[a,b]$.

   (b) $Q_n(p) \to \int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t,\ n \to \infty$, para todo polinomio $p : [a,b] \to \mathbb{K}$ y $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}| < \infty$.