

# Análisis Funcional

## Taller 4

Hahn Banach, espacios duales II.

Fecha de entrega: 22 de febrero 2012

---

1. Un *isomorfismo entre espacios normados*  $X$  y  $Y$  es un homeomorfismo lineal. Pruebe las siguientes afirmaciones.
  - (a) Si  $T : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo [isométrico] entre los espacios normados  $X$  y  $Y$ , entonces  $T' : Y' \rightarrow X'$  es un isomorfismo [isométrico]. Si  $X$  y  $Y$  son espacios de Banach, el converso también vale.
  - (b) Si un espacio normado  $Y$  es isomorfo a un espacio de Banach reflexivo  $X$ , entonces  $Y$  es un espacio de Banach reflexivo.
2. Sea  $X$  un espacio normado separable y  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada en  $X'$ . Entonces existe una subsucesión  $(x'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  y  $x'_0 \in X'$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}(x) = x'_0(x), \quad x \in X.$$

Es cierto esto sin la hipótesis de que  $X$  sea separable?

3. Sea  $X$  un espacio normado y  $M$  un subespacio de  $X$ . Sea

$$L = \{f \in X' \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Muestre que  $L$  es un subespacio cerrado de  $X'$  y que  $M'$  es isométricamente isomorfo a  $X'/L$ .

4. Muestre que en  $l_1$  la convergencia débil y la convergencia en norma coinciden.