

Análisis funcional

Taller 2

Operadores lineales.

Fecha de entrega: 8 de Febrero de 2012

1. Sea X un espacio normado con $\dim X \geq 1$ y S, T operadores lineales en X tales que $ST - TS = id$. Muestre que al menos uno de estos operadores no es acotado. Ayuda: Muestre que $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$.
2. Sean X y Y espacios normados con X de dimensión finita. Muestre que toda función lineal $T : X \rightarrow Y$ es acotada.
3. (a) Sea $X = C([a, b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Muestre que

$$T : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad Tx = \int_a^b x(t) dt$$

es un operador lineal y acotado. ¿Cuál es su norma?

- (b) Ahora considere X con la norma

$$\|x\|_p := \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad x \in X,$$

para $1 \leq p < \infty$. ¿Sigue siendo T acotado? Si es así, calcule su norma.

(Si no han visto teoría de medida, indíquelo claramente y hagan el ejercicio solo para $p = 1$).

4. Sea $1 \leq p < \infty$. Para $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ sea $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ definido por $(Tx)_n = x_n z_n$ para $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p$. Muestre que $T \in L(\ell_p)$ y calcule $\|T\|$.