Universidad de los Andes, MATE-3330 y MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 15

Operadores compactos.

Fecha de entrega: Mayo 22 de 2025

---

1. Determine todas las funciones continuas $\tau : [0,1] \to [0,1]$ tales que

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \qquad Af := f \circ \tau$$

es compacto.

2. Sea $X = C[0,1]$ y $k \in C[0,1]^2$ y defina

$$T : X \to X, \qquad (Tx)(t) = \int_0^t k(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Se puede mostrar que T es compacto (sería un buen ejercicio voluntario).

(a) Muestre que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$.

(b) Muestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para todo $y \in X$ existe exactamente un $x \in X$ tal que $(T - \lambda)x = y$.

3. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ una sucesion ortonormal. Sea $\{\lambda_n\}_{\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada. Defina:

$$Ax := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k.$$

Muestre que A es un operador acotado autoadjunto y que es compacto si y solo si $\lambda_k \to 0$.

4. Sea X un espacio de Banach reflexivo. Demuestre que para $T \in L(X)$ lo siguiente es equivalente:

(a) T es compacto.

(b) Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ débilmente convergente, la sucesión $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.