Universidad de los Andes, MATE-3330 y MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 14

Espectro de operadores; operadores compactos.

Fecha de entrega: Mayo 15 de 2025

---

1. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal densamente definido y cerrado. Muestre:
   (a) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
   (b) $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ donde $\partial\sigma(T)$ denota la frontera de $\sigma(T)$ en $\mathbb{C}$.
   (c) Si X es un espacio de Hilbert y T es autoadjunto, entonces $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.

2. Sea X un espacio de Banach complejo. Para $T \in L(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ sea

$$\mathcal{A}_\lambda(T) := \{x \in X : x \in \ker(T-\lambda)^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

   el espacio propio generalizado de T en $\lambda \in \sigma_p(T)$.
   (a) Sea $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, $x_0 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(T) \setminus \{0\}$ y $\mathcal{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\}$. Defina

$$f : \mathcal{D} \to X, \qquad f(\lambda) := (\lambda - T)^{-1} x_0,$$
$$g : \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\} \to X, \qquad g(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 - T}{\lambda_0 - \lambda} \right)^n x_0.$$

   Demuestre que g es una extensión holomorfa de f.
   (b) Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios de T con $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \neq k$ y sea $\mathcal{A}_{\lambda_j}(T)$ el espacio propio generalizado. Sea $x_j \in \mathcal{A}_{\lambda_j}(T)$, $x_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Demuestre que los $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes.

3. Sea H un espacio de Hilbert y sea $U \in L(H)$ un operador unitario. Demuestre que $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

4. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador compacto. Demuestre que la imagen de T es cerrado si y solo es de dimensión finita.