

Análisis Funcional

Taller 13

Espectro de operadores lineales.

Fecha de entrega: 08 de mayo de 2025

1. (a) Sea $X = C([0, 1])$ y $a \in C([0, 1])$. Muestre que

$$A : X \rightarrow X, \quad (Ax)(t) = a(t)x(t)$$

es un operador lineal acotado. Encuentre $\|A\|$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ y $\sigma_r(A)$.

- (b) Sea $Y = C[0, 1]$ y

$$T : Y \rightarrow Y, \quad (Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Encuentre $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$.

- (c) **Ejercicio voluntario.** Sea $X = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$ y

$$S : X \rightarrow X, \quad (Sf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Encuentre $\sigma(S)$, $\sigma_p(S)$, $\sigma_c(S)$ y $\sigma_r(S)$.

2. Sea $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión acotada, y,

$$T : \ell^1 \rightarrow \ell^1, \quad T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Encuentre $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$. Muestre además que, para todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto no vacío, existe un operador $T \in L(\ell^1)$ cuyo espectro es K .

3. Sea X un espacio de Banach $S, T \in L(X)$. Muestre que $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$.

Hint. Muestre que $\text{id} - ST$ es invertible si y solo si $\text{id} - TS$ es invertible, encontrando una relación entre $(\text{id} - TS)^{-1}$ y $(\text{id} - ST)^{-1}$. Suponga $\|T\| \|S\| < 1$ y mire si la relación en este caso es válida en general.

4. Encuentre el espectro puntual, el espectro continuo y el espectro residual de los operadores:

$$R : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N}), \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots),$$

$$L : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N}), \quad L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

$$T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$