

Análisis Funcional

Taller 12

Proyecciones; Operadores no negativos; operadores adjuntos.

Fecha de entrega: Abril 30 de 2025

Sea H un espacio de Hilbert. Si S y T son operadores en $L(H)$ autoadjuntos, decimos que T es *no negativo* ($T \geq 0$) si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$ y $T \leq S$ si $S - T \geq 0$. Una sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(H)$ es *creciente* si $T_n \leq T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es *decreciente* si $(-T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.

1. Sea H un espacio de Hilbert y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y monótonamente creciente de operadores autoadjuntos. Muestre que la sucesión converge en el sentido fuerte a un operador autoadjunto.
2. Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H . Muestre que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en el sentido fuerte a una proyección ortogonal P y además
 - (a) $\text{rg } P = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{rg } P_n}$ si P_n es creciente.
 - (b) $\text{rg } P = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rg } P_n}$ si P_n es decreciente.
3. Sean H_1, H_2 y H_3 espacios de Hilbert y $S(H_1 \rightarrow H_2)$ y $T(H_2 \rightarrow H_3)$ operadores lineales densamente definidos.
 - (a) Si $T \in L(H_2, H_3)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.
 - (b) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.
 - (c) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces S^* es inyectivo y $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.
4. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $U : H_1 \times H_2 \rightarrow H_2 \times H_1$, $U(x, y) = (-y, x)$. Entonces
 - (a) U es unitario.
 - (b) Si $T(H_1 \rightarrow H_2)$ es densamente definido,

$$G(T^*) = [U(G(T))]^\perp = U(G(T)^\perp).$$

- (c) T^* es cerrado.
- (d) Si T es clausurable, T^* es densamente definido y $T^{**} = \overline{T}$.