Análisis Funcional

Taller 11

Proyecciones, Bases ortonormales y Operadores Normales

Fecha de entrega: 27 de abril de 2025

---

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T : H \to H$ un operador lineal acotado. Muestre que T es normal si y solo si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$. En este caso, muestre que $\|T^2\| = \|T\|^2$.

2. Sea H un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión tal que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1$$
y sea $z \in H$ con $z \perp y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $z = 0$.

3. Sea H un espacio de Hilbert, $V, W \subseteq H$ subespacios cerrados y P_V, P_W sus correspondientes proyecciones ortogonales.
   (a) Muestre que
   $$V \subseteq W \qquad \iff \qquad P_V = P_V P_W = P_W P_V.$$
   (b) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (i) $P_V P_W = 0$.
   (ii) $V \perp W$.
   (iii) $P_V + P_W$ es una proyección ortogonal.

   Muestre que $\mathrm{rg}(P_V + P_W) = V \oplus W$ si alguna de las condiciones anteriores se tiene.

4. Sea H un espacio de Hilbert y P_0, P_1 las proyecciones ortogonales sobre H_0, $H_1 \subseteq H$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalenteas:
   (i) $H_0 \subseteq H_1$,
   (ii) $\|P_0 x\| \le \|P_1 x\|, \quad x \in H$.
   (iii) $\langle P_0 x\,, x\rangle \le \langle P_1 x\,, x\rangle, \quad x \in H$.
   (iv) $P_0 P_1 = P_0$.

5. **Para código 4.** Sea $H = L_2(0, 1)$.
   (a) Demuestre que $P : H \to H,\ Pf(t) = \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$ es una proyección ortogonal en H. ¿Que es su rango?
   (b) Sea $A : H \to H,\ Af(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. Enucentre A^* in términos de A y P.