Análisis Funcional

Espacios de Hilbert.

Fecha de entrega: 10 de abril de 2025

1. Sea X un espacio pre-Hilbert, $U \subseteq X$ un subespacio denso y $x_0 \in X$ tal que $\langle x_0, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$. Muestre que $x_0 = 0$.
2. (a) Sea X un espacio normado, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ y $x \in X$. Muestre que lo siguiente es equivalente:
 - (i) $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ converge incondicionalmente¹ a x .
 - (ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que para todo conjunto finito B con $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{b \in B} x_b - x \right\| < \varepsilon.$$

- (b) Dé un ejemplo de una serie que converge incondicionalmente pero que no converge absolutamente.
3. Sea H un espacio de Hilbert.
 - (a) Muestre que H es reflexivo.
 - (b) Muestre que H' es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{H'} = \langle y, x \rangle_H$$

con $\Phi : H \rightarrow H'$ como en el teorema de Riesz-Freché. Muestre que la norma inducida por este producto interno es la norma de H' .

4. Sea H un espacio de Hilbert and $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ sesquilineal. En $H \times H$ considere la norma $\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.
 - (a) Muestre que las siguientes son equivalentes:
 - (i) B es continua.
 - (ii) B es parcialmente continua, es decir, para cada x_0 fijo, $y \mapsto B(x_0, y)$ es continua para cada y_0 fijo, $x \mapsto B(x, y_0)$ es continua.
 - (iii) B es acotado, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in H$.
 - (b) Si B es continuo, entonces existe $T \in L(H)$ tal que

$$B(x, y) = \langle Tx, y \rangle, \quad x, y \in H.$$

- (c) Si además existe $m > 0$ tal que $B(x, x) \geq m\|x\|^2$, $x \in H$, entonces T es invertible y $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$.

¹Sean x_λ vectores en un espacio normado X . La serie $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ converge incondicionalmente a $x \in X$ si y solo si lo siguiente se tiene:

- (a) $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es contable.
 - (b) $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\lambda_j} = x$ para cualquier ordenamiento $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$.
- En este caso se escribe $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$.