

Análisis Funcional

Taller 6

Operadores cerrados.

Fecha de entrega: 6 de marzo de 2025

Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ un operador lineal.

- (a) Sea $S : X \supseteq \mathcal{D}(S) \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces la *suma de operadores* $S + T$ se define como

$$\mathcal{D}(S + T) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T), \quad (S + T)x := Sx + Tx.$$

- (b) Sea $R : Y \supseteq \mathcal{D}(R) \rightarrow Z$ un operador lineal. Entonces el *producto de operadores* or *composición* RT se define como

$$\mathcal{D}(RT) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(R)\}, \quad (RT)x := R(Tx).$$

1. Sean X, Y, Z espacios de Banach, $R \in L(X, Y)$, $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$, $S : Y \supseteq \mathcal{D}(S) \rightarrow Z$ operadores lineales cerrados. Muestre que:

- (a) $R + T$ es un operador lineal cerrado.
- (b) SR es cerrado.
- (c) Si S es continuamente invertible (i. e., $S^{-1} : \text{rg}(S) \rightarrow Y$ existe y es continuo), entonces ST es cerrado.

Muestre además que estas afirmaciones siguen siendo válidas cambiando “cerrado” por “clausurable”.

2. Sea $X = \ell_2(\mathbb{N})$ y

$$T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow X, \quad Tx = (nx_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{para} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Diga si T es cerrado con:

- (a) $\mathcal{D}(T) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : (nx_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})\}$,
- (b) $\mathcal{D}(T) = d = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : x_n \neq 0 \text{ para solo finitos } n\}$.

3. Let X un espacio de Banach, $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ un subespacio denso y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathbb{K}^n$ un operador lineal. Muestre que T es cerrado si y solo si $T \in L(X, \mathbb{K}^n)$.

4. Sean X y Y espacios normados y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ un operador lineal cerrado.

- (a) Sea $K \subset \mathcal{D}(T)$ compacto. Muestre que $T(K)$ es cerrado en Y .
- (b) Muestre que si F es un compacto en Y entonces $T^{-1}(F)$ es cerrado en X .
- (c) ¿Si A es cerrado en X , es cierto que $T(A)$ es cerrado?