Universidad de los Andes, MATE-3330 y MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 4

Hahn Banach, espacios duales II.

Fecha de entrega: 20 de febrero 2025

---

1. Un *isomorfismo entre espacios normados* X y Y es un homeomorfismo lineal (es decir, es lineal, biyectivo y él y su inverso con acotados). Pruebe las siguientes afirmaciones.
   (a) Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre los espacios normados X y Y, entonces $T' : Y' \to X'$ es un isomorfismo. Si T es adicionalmente isométrico, T' también lo es. Si X y Y son espacios de Banach, el converso también vale (es decir: Si T' es un isomorfismo [isométrico], entonces T también es un isomorfismo [isométrico]).
   (b) Si un espacio normado Y es isomorfo a un espacio de Banach reflexivo X, entonces Y es un espacio de Banach reflexivo.

2. Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Sea

$$L = \{f \in X' \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

   Muestre que L es un subespacio cerrado de X' y que M' es isométricamente isomorfo a X'/L.

3. Ejemplos de operadores adjuntos.
   (a) Sea X un espacio de Banach y sea $\varphi \in X'$. Encuentre φ'.
   (b) Sea $z \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Demuestre que

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), Tx := (0,\, z_1x_1,\, z_2x_2,\, \dots,\,)$$

   es un operador lineal acotado bien definido y encuentre $\|T\|$ y T'.
   (c) Demuestre que

$$T : L^1([0,1]) \to c_0, \quad (Tf)_n := \int_0^1 t^n f(t)\, \mathrm{d}t$$

   es un operador lineal acotado bien definido y encuentre T'.

   Si no ha visto Medida, puede hacer el Ejercicio 5 en lugar del Ejercicio 3(c). Si desea hacerlo, lo debe indicar claramente.

4. Muestre que en $l_1(\mathbb{N})$ la convergencia débil y la convergencia en norma coinciden.

5. **Voluntario.** Sean X, Y espacios de Banach y sea $T \in L(X, Y)$. Muestre lo siguiente.
   (a) Si $\dim(\mathrm{rg}(T)) = 1$, entonces existe $\varphi \in X'$ y $y \in Y$ tal que $T(x) = \varphi(x)y$ para todo $x \in X$.

(b) Si $\dim(\mathrm{rg}(T)) = n < \infty$, entonces existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X'$ y $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tal que $T(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) y_j$ para todo $x \in X$.

(c) Encuentre T' para T como en (b).