Universidad de los Andes, MATE-3330 y MATE-4330

Análisis funcional

Taller 3

Hahn Banach, Espacios duales.

Fecha de entrega: 13 de febrero de 2025

---

1. Demuestre el teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos.

   Sugerencia: Para un espacio vectorial sobre los complejos X muestre que:

   (a) Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ un funcional $\mathbb{R}$-lineal, entonces
   $$V_\varphi : X \to \mathbb{C}, \quad V_\varphi(x) := \varphi(x) - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x),$$
   es un funcional $\mathbb{C}$-lineal sobre X con $\mathrm{Re}V_\varphi = \varphi$.

   (b) Sea $\lambda : X \to \mathbb{C}$ un funcional $\mathbb{C}$-lineal con $\mathrm{Re}\lambda = \varphi$, entonces $V_\varphi = \lambda$.

   (c) Sea p una seminorma sobre X y φ, V_φ definido como en el punto anterior. Si φ es acotado, entonces
   $$|\varphi(x)| \leq p(x) \iff |V_\varphi(x)| \leq p(x), \qquad x \in X.$$

   (d) $\|\varphi\| = \|V_\varphi\|$ si φ es acotado.

2. En $X = \ell_2(\mathbb{N})$ considere el subespacio
   $$U = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ excepto para un número finito de índices } n\}.$$
   Sea V un complemento algebraico de U en X, i. e., U es un subespacio tal que $U + V = X$ y $U \cap V = \{0\}$. Muestre que
   $$\varphi : X \to \mathbb{K}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{para } x = u + v \text{ con } u \in U,\ v \in V$$
   es un funcional lineal bien definido y no acotado.

3. (a) Sea $c \subseteq \ell_\infty$ el conjunto de las sucesiones convergentes. Muestre que el funcional
   $$\varphi_0 : c \to \mathbb{K}, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$
   es continuo y calcule su norma.

   (b) Sea $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$ con la norma del supremo. Muestre que existe $\varphi \in (\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ tal que
   $$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty.$$

4. Sea X un espacio normado, $f : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo y $K = \ker f$

   (a) Muestre que $\dim(X/K) = 1$.

   (b) Muestre que f es continuo si y solo si $\ker f$ es cerrado.

5. **Para código 4.** Sea X un espacio normado con $\dim X \geq 1$ y S, T operadores lineales en X tales que $ST - TS = id$. Muestre que al menos uno de estos operadores no es acotado. Ayuda: Muestre que $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$.