Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis funcional

Taller 2

Operadores lineales.

Fecha de entrega: 6 de febrero de 2025

---

1. Sea $\mathcal{D}$ un subespacio denso en un espacio normado X, sea Y un espacio de Banach y sea $T \in L(\mathcal{D}, Y)$. Defina $\widehat{T} : X \to Y$ por $\widehat{T}x := \lim_{n\to\infty} Tx_n$ donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ es una sucesión que converge a x. (En clase vamos a se mostrar que $\widehat{T}$ está bien definido.)

   Demuestre que $\widehat{T} \in L(X, Y)$, que es la única extensión continua de T a X y que $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

2. Sea X un espacio compacto, $C_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunto de funciones continuas real-evaluadas sobre X y $Y \subset X$ un subconjunto cerrado.
   (a) Considere el mapa $\varrho : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ definido por $\varrho(f) = f|_Y$. Muestre que $I := \ker(\varrho)$ es un subespacio cerrado de $C_{\mathbb{R}}(X)$.
   (b) Sea $\widetilde{\varrho} : C_{\mathbb{R}}(X)/I \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ el mapa inducido en el espacio cociente. Pruebe que $\widetilde{\varrho}$ es una isometría.
   (c) Demuestre que $\operatorname{rg}(\varrho)$ es completo.

3. (a) Sea $X = C([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Muestre que
   $$T : X \to \mathbb{C}, \qquad Tx = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$
   es un operador lineal y acotado. ¿Cuál es su norma?
   (b) Ahora considere X con la norma
   $$\|x\|_p := \Big(\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}, \qquad x \in X,$$
   para $1 \le p < \infty$. ¿Sigue siendo T acotado? Si es así, calcule su norma.
   (Si no ha visto teoría de medida, indíquelo claramente y haga el ejercicio solo para $p = 1$).

4. Sea $1 \le p < \infty$. Para $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ sea $T : \ell_p(\mathbb{N}) \to \ell_p(\mathbb{N})$ definido por $(Tx)_n = x_n z_n$ para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Muestre que $T \in L(\ell_p(\mathbb{N}))$ y calcule $\|T\|$.

5. **Para código 4.** (Cf. Lema de Riesz.)

   Sea $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ y sea $Y := \{f \in X : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$. Convenzase que X es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y que Y es un subespacio cerrado en X.

   Demuestre que no existe $f \in X$ con $\|f\|_\infty = 1$ y $\operatorname{dist}(f, Y) = 1$.