Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis funcional

Taller 1

Espacios métricos y normados.

Fecha de entrega: 30 de enero de 2025

---

1. Sea X un espacio normado. Muestre:
   (a) Todo subespacio finito-dimensional de X es cerrado.
   (b) Si V es un subespacio finito-dimensional de X y W es un subespacio cerrado de X, entonces
   $$V + W := \{v + w : v \in V,\ w \in W\}$$
   es un subespacio cerrado de X.

2. Sea T un conjunto y $\ell_\infty(T)$ el conjunto de todas las funciones $x : T \to \mathbb{K}$ con
   $$\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)| : t \in T\} < \infty.$$
   Muestre que $(\ell_\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

3. Considere los espacios de sucesiones d, c_0, c definidos por
   $$\begin{aligned} c &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es convergente}\}, \\ c_0 &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}, \\ d &:= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para } n \geq N\}. \end{aligned}$$
   (a) Muestre que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $(c, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.
   (b) Muestre que $(d, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado, pero que no es completo.

4. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Demuestre que todas las normas en $\mathbb{K}^n$ son equivalentes. Es decir: Si $\|\cdot\|$ y $|||x|||$ son normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que
   $$a\|x\| \leq |||x||| \leq b\|x\|, \qquad x \in \mathbb{K}^n.$$