

Análisis Funcional

Taller 11

Proyecciones, Bases ortonormales y
Operadores Normales

Fecha de entrega: 27 de abril de 2023

1. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado. Muestre que T es normal si y solo si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$. En este caso, muestre que $\|T^2\| = \|T\|^2$.

2. Sea H un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1$$

y sea $z \in H$ con $z \perp y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $z = 0$.

3. Sea H un espacio de Hilbert, $V, W \subseteq H$ subespacios cerrados y P_V, P_W sus correspondientes proyecciones ortogonales.

(a) Muestre que

$$V \subseteq W \iff P_V = P_V P_W = P_W P_V.$$

(b) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $P_V P_W = 0$.

(ii) $V \perp W$.

(iii) $P_V + P_W$ es una proyección ortogonal.

Muestre que $\text{rg}(P_V + P_W) = V \oplus W$ si alguna de las condiciones anteriores se tiene.

4. Sea H un espacio de Hilbert y P_0, P_1 las proyecciones ortogonales sobre $H_0, H_1 \subseteq H$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $H_0 \subseteq H_1$,

(ii) $\|P_0x\| \leq \|P_1x\|, \quad x \in H$.

(iii) $\langle P_0x, x \rangle \leq \langle P_1x, x \rangle, \quad x \in H$.

(iv) $P_0 P_1 = P_0$.