Análisis Funcional

Taller 10

Espacios de Hilbert y pre-Hilbert

Fecha de entrega: 20 de abril de 2023

---

1. Sea X un espacio pre-Hilbert, $U \subseteq H$ un subespacio denso y $x_0 \in X$ tal que $\langle x_0 \,, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$. Muestre que $x_0 = 0$.

2. (a) Sea X un espacio normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $x \in X$. Muestre que lo siguiente es equivalente:
   (i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge incondicionalmente[1] a x.
   (ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que para todo conjunto finito B con $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$
   $$\Big\| \sum_{b\in B} x_b - x \Big\| < \varepsilon.$$
   (b) Dé un ejemplo de una serie que converge incondicionalmente pero que no converge absolutamnente.

3. Sea H un espacio de Hilbert.
   (a) Muestre que H es reflexivo.
   (b) Muestre que H' es un espacio de Hilbert con el producto interno
   $$\langle \Phi(x) \,, \Phi(y) \rangle_{H'} = \langle y \,, x \rangle_H$$
   con $\Phi : H \to H'$ como en el teorema de Riesz-Frechét. Muestre que la norma inducida por este producto interno es la norma de H'.

4. Sea H un espacio de Hilbert and $B : H \times H \to \mathbb{K}$ sesquilineal. En $H \times H$ considere la norma $\|(x,y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.
   (a) Muestre que las siguientes son equivalentes:
   (i) B es contínua.
   (ii) B is parcialmente contínua, es decir, para cada x_0 fijo, $y \mapsto B(x_0, y)$ es contínua para cada y_0 fijo, $x \mapsto B(x, y_0)$ es contínua.
   (iii) B es acotado, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in H$.
   (b) Si B es contínuo, entonces existe $T \in L(H)$ tal que
   $$B(x,y) = \langle Tx \,, y \rangle, \qquad x, y \in H.$$
   (c) Si además existe $m > 0$ tal que $B(x,x) \geq m\|x\|^2$, $x \in H$, entonces T es invertible y $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$.

---

[1] Sean x_λ vectores en un espacio normado X. La serie $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ *converge incondicionalmente a* $x \in X$ si y solo si lo siguiente se tiene:
(a) $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es contable.
(b) $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\lambda_j} = x$ para cualquier ordenamiento $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$.
En este caso se escribe $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$.