Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 9

Espacios de Hilbert y pre-Hilbert

Fecha de entrega: 13 de abril de 2023

---

1. Sea $w \in C([0,1],\mathbb{R})$. Para $x, y \in C([0,1])$ se define

$$\langle x\,, y\rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)\,\mathrm{d}t.$$

Halle una condición necesaria y suficiente sobre w para que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_w$ sea un producto interno. Bajo qué condición es la norma inducida por $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_w$ equivalente a la norma usual de L_2?

2. ¿Existe un producto interno $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ en $C[0,1]$ tal que $\langle x, x\rangle = \|x\|_\infty^2$ para todo $x \in C[0,1]$?

3. Para x, y en un espacio pre-Hilbert X demuestre:
   (a) Si $x \perp y$, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ¿El converso es cierto en general? ¿Hay algún caso para el que se tenga?
   (b) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $x \perp y$ demuestre que el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente independiente. ¿Como se puede generalizar este resultado?
   (c) $x \perp y$, si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo escalar α.

4. Sea X un espacio pre-Hilbert y $U \subseteq X$ un subespacio.
   (a) Muestre que $\overline{U} \neq U^{\perp\perp}$ es posible. ¿Se tiene alguna contenencia?
   (b) Muestre que $\overline{U} \oplus U^{\perp} \neq X$ es posible.