Functional Analysis

Taller 8

Topología débil; funcional de Minkowski. Fecha de entrega: 30 de marzo de 2023

---

1. Sea X un espacio normado.
   (a) Muestre que $(X, \|\cdot\|)' = (X, \sigma(X, X'))'$. Es decir: un funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\|\cdot\|$ si y sólo si es continua con respecto a la topología débil.
   (b) Sean $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria y $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada en X. ¿Siempre son débilmente cerradas (prueba o contraejemplo)?

2. Sean $1 < p < \infty$ y sea $X = \ell_p(\mathbb{N})$. Para $m < n$ defina $\varphi_{m,n} \in (\ell_p(\mathbb{N}))'$ por $\varphi_{m,n}(x) = x_n + x_m$ para $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Sea $A := \{\varphi_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\} \subset (\ell_p(\mathbb{N}))'$.
   (a) Muestre que A no contiene puntos de acumulación en la topología inducida por la norma en $(\ell_p(\mathbb{N}))'$.
   (b) Muestre que $A \subseteq \{\psi \in (\ell_p(\mathbb{N}))' : \|\psi\| \leq 2\}$.
   (c) Encuentre un punto de acumulación de A en la topología débil-$*$.

3. Sea X un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ que converge débilmente a x_0.
   (a) Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ donde $V \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y convexo. Demuestre que $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in V$.
   (b) Muestre que existe una sucesión
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
   de combinaciones lineales finitas de los $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en norma a x_0.

   Ayuda. Puede usar la siguiente forma del teorema de Hahn-Banach:
   Sea X un espacio normado, $V \subseteq X$ un conjunto cerrado y convexo y sea $x \notin V$. Entonces existen $\varphi \in X'$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathrm{Re}(\varphi(x)) < \mathrm{Re}(\varphi(x)) + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(\varphi(v))$ para todo $v \in V$.

4. Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$ un subconjunto convexo, balanceado y absorbente. Muestre que el funcional de Minkowski
   $$p_M : X \to [0, \infty], \quad p_M(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}x \in M\right\}.$$
   es una seminorma en X.