

Análisis Funcional

Taller 7

Proyecciones; convergencia débil.

Fecha de entrega: 16 de Marzo de 2023

1. Ejemplo de una proyección no acotada. Sea $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{N})$ y e_j el vector usual $e_j^k = \delta_j^k$. Defina

$$U := \overline{\text{span}\{e_{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}}, \quad V := \overline{\text{span}\{e_1 + 2^{-1}e_2, e_3 + 2^{-2}e_4, e_5 + 2^{-3}e_6, \dots\}}.$$

- Muestre que $U \cap V = \{0\}$.
 - Muestre que $\overline{U \oplus V} = \mathcal{H}$.
 - Muestre que $U \oplus V \neq \mathcal{H}$.
 - Defina el operador $P_0 : U \oplus V \rightarrow U \oplus V$, $P_0(x + y) = x$. Muestre que P_0 es una proyección no acotada.
2. Sea X un espacio normado sobre \mathbb{K} y sean $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ funcionales lineales sobre X tal que $\bigcap_{j=1}^n \ker \varphi_j \subseteq \ker \psi$. Demuestre que $\psi \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.
3. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ es una *sucesión débil de Cauchy* si para todo $\varphi \in X'$ la sucesión $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{K} .

- Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X . Muestre que x es una sucesión débil de Cauchy si y solo si existe un subconjunto denso U' de X' tal que $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $\varphi \in U'$.
- Toda sucesión débil de Cauchy en X es acotada.

4. Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X'$, y $x_0 \in X$, $\varphi_0 \in X'$.

- Suponga que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi_0$. Muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$.
- Suponga que $x_n \xrightarrow{w} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi_0$. ¿Se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$?