Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 6

Operadores cerrados.

Fecha de entrega: 9 de marzo de 2023

Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal.

(a) Sea $S : X \supseteq \mathcal{D}(S) \to Y$ un operador lineal. Entonces la *suma de operadores* $S + T$ se define como

$$\mathcal{D}(S+T) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T), \qquad (S+T)x := Sx + Tx.$$

(b) Sea $R : Y \supseteq \mathcal{D}(R) \to Z$ un operador lineal. Entonces el *producto de operadores* or *composición* RT se define como

$$\mathcal{D}(RT) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(R)\}, \qquad (RT)x := R(Tx).$$

1. Sean X, Y, Z espacios de Banach, $R \in L(X,Y)$, $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to Y$, $S : Y \supseteq \mathcal{D}(S) \to Z$ operadores lineales cerrados. Muestre que:

   (a) $R + T$ es un operador lineal cerrado.

   (b) SR es cerrado.

   (c) Si S es contínuamente invertible (i. e., $S^{-1} : \operatorname{rg}(S) \to Y$ existe y es contínuo), entonces ST es cerrado.

   Muestre además que estas afirmaciones siguen siendo válidas cambiando "cerrado" por "clausurable"

2. Sea $X = \ell_2(\mathbb{N})$ y

   $$T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to X, \qquad Tx = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{para} \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Diga si T es cerrado con:

   (a) $\mathcal{D}(T) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \,:\, (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})\}$,

   (b) $\mathcal{D}(T) = d = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \,:\, x_n \neq 0 \text{ para solo finitos } n\}$.

3. Let X un espacio de Banach, $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ un subespacio denso y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to \mathbb{K}^n$ un operador lineal. Muestre que T es cerrado si y solo si $T \in L(X, \mathbb{K}^n)$.

4. Sean X y Y espacios normados y $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \to Y$ un operador lineal cerrado.

   (a) Sea $K \subset \mathcal{D}(T)$ compacto. Muestre que $T(K)$ es cerrado en Y.

   (b) Muestre que si F es un compacto en Y entonces $T^{-1}(F)$ es cerrado en X.

   (c) ¿Si A es cerrado en X, es cierto que $T(A)$ es cerrado?