

Análisis Funcional

Taller 4

Hahn Banach, espacios duales II.

Fecha de entrega: 23 de febrero 2023

1. Un *isomorfismo entre espacios normados* X y Y es un homeomorfismo lineal. Pruebe las siguientes afirmaciones.
 - (a) Si $T : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo entre los espacios normados X y Y , entonces $T' : Y' \rightarrow X'$ es un isomorfismo. Si T es adicionalmente isométrico, T' también lo es. Si X y Y son espacios de Banach, el converso también vale (es decir: Si T' es un isomorfismo [isométrico], entonces T también es un isomorfismo [isométrico]).
 - (b) Si un espacio normado Y es isomorfo a un espacio de Banach reflexivo X , entonces Y es un espacio de Banach reflexivo.

2. Sea X un espacio normado separable y $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X' . Entonces existe una subsucesión $(x'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $x'_0 \in X'$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}(x) = x'_0(x), \quad x \in X.$$

Es cierto esto sin la hipótesis de que X sea separable?

3. Sea X un espacio normado y M un subespacio de X . Sea

$$L = \{f \in X' \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Muestre que L es un subespacio cerrado de X' y que M' es isométricamente isomorfo a X'/L .

4. Muestre que en $l_1(\mathbb{N})$ la convergencia débil y la convergencia en norma coinciden.